ORSAY
SÉRIE A
Nº D'ORDRE : 20

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Henri CORNILLE

1re THÈSE. — **« Contribution à l'étude des propriétés de la diffusion par des potentiels du type de Yukawa généralisé ».**

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 24 mai 1963 devant la Commission d'examen.

MM. M. LEVY *Président.*
M. JEAN, R. NATAF *Examinateurs.*
A. MARTIN *Invité.*

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*
3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres
PARIS (15e)
1963

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538126_0062

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Nom du Candidat : **CORNILLE**

Prénom : **Henri**

Date de la soutenance : 24 mai 1963

Numéro d'ordre : Série A, N° 20

1

CORNILLE (Henri). — « Contribution à l'étude des propriétés de la diffusion par des potentiels du type de Yukawa généralisé ». — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1963, 55 p., 9 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1963, Série A, N° 20.

2

CORNILLE (Henri). — « Contribution à l'étude des propriétés de la diffusion par des potentiels du type de Yukawa généralisé ». — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1963, 55 p., 9 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1963, Série A, N° 20.

3

CORNILLE (Henri). — « Contribution à l'étude des propriétés de la diffusion par des potentiels du type de Yukawa généralisé ». — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1963, 55 p., 9 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1963, Série A, N° 20.

4

CORNILLE (Henri). — « Contribution à l'étude des propriétés de la diffusion par des potentiels du type de Yukawa généralisé ». — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1963, 55 p., 9 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1963, Série A, N° 20.

ORSAY
Série A
N° d'ordre : 20

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Henri CORNILLE

1re THÈSE. — **« Contribution à l'étude des propriétés de la diffusion par des potentiels du type de Yukawa généralisé ».**

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 24 mai 1963 devant la Commission d'examen.

MM. M. LEVY — *Président.*
M. JEAN, R. NATAF — *Examinateurs.*
A. MARTIN — *Invité.*

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*
3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres
PARIS (15e)
1963

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... M. ZAMANSKY

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.
WYART	T	Minéralogie et Cristallographie
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
DRACH	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique (E. N. S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie (S. P. C. N.) et sédim.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P. C. B.).
LUCAS R.	T	Recherches physiques.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique Enseignement.
SOLEILLET	T	Physique (P. C. B.).
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
DANJON	T	Astronomie.
PETIT	T	Biologie maritime.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique.
THELLIER	T	Physique du Globe.
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique générale.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Pétrographie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théories physiques.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallogr.
MATHIEU J.-P.	T	Physique (Optique).
COUTEAUX	T	Biologie animale (P. C. B.).
MAY	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
SCHARTZ	T	Calcul diff. et intégral.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (Techn. aéronaut.).
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral.
NORMANT	T	Synthèse organique générale.
BÉNARD	T	Chimie minérale.
BUVAT	T	Botanique (E. N. S.).
DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végétale.
MARÉCHAL	T	Optique théorique et appl.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition.
SALEM	T	Mathématiques générales.
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées.
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S. P. C. N.).
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
GODEMENT	T	Mathématiques (M. P. C.).
PISOT	T	Techniques mathém. de la Physique.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMAN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (M. G. P.).
RIZET	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT	T	Physique théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques (M. P. C.).
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Electrotechnique générale.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
M. LÉVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY	T	Biologie végétale (P. C. B.).
PIAUX	T	Chimie (M. P. C.).
BRUN	T	Mécanique théorique des Fluides.
LEDERER	T	Chimie biologique.
Mme DUBREIL	T	Mathém. (Agrégation).
Mme LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.).
BELLAIR	T	Géologie (S. P. C. N.).
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie (E. N. S.).
MICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER	T	Energétique générale.
ROUAULT	T	Electricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER		Physiologie comparée.
CAMUS		Physiol. vég. (B.M.P.V.).
CASTAING	T	Physique (Orsay).
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie.
MOYSE	T	Physiologie vég. (Orsay).
NOIROT		Evolution des êtres org.
PANNETIER	T	Chimie générale.
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie théorique.
TEILLAC	T	Physique nucléaire et radioactivité
TONNELAT	T	Biologie physico-chimique.
VILLE	T	Econométrie.
WILLEMART		Chimie (P. C. B.).
DODÉ	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN	T	Recherches physiques.
GUINOCHET	T	Biol. vég. (S.P.C.N.) (Orsay).
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.)
Mlle JOSIEN	T	Chimie (S. P. C. N.).
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT	T	Electronique (Orsay).

(suite en dernière page)

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

A MA FEMME ET A MES TROIS ENFANTS

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE LA DIFFUSION PAR DES POTENTIELS DU TYPE DE YUKAWA GÉNÉRALISÉ

PAR

Henri CORNILLE

INTRODUCTION

Depuis quelque temps déjà de nombreux auteurs, en théorie du potentiel, se sont particulièrement intéressés à l'étude des propriétés de la diffusion par des potentiels de la forme

$$V(r) = \int_{\mu}^{\infty} C(\alpha)\, \mathrm{e}^{-\alpha r}\, \mathrm{d}\alpha\,, \tag{1}$$

appelés potentiels du type de Yukawa généralisé ou quelquefois potentiels du type superposition d'exponentielles. Il existe de nombreuses raisons à l'étude systématique de cette classe relativement restreinte de potentiels.

a) Tout d'abord c'est la généralisation naturelle des potentiels théoriques obtenus en théorie des champs, les plus simples étant le potentiel de Yukawa et l'o.p.e.p. (approximation statique de l'interaction où l'on considère l'échange d'un méson π entre deux nucléons).

b) Malgré l'échec des potentiels purement mésiques, tirés de la théorie des champs, pour rendre compte correctement des résultats expérimentaux de la diffusion nucléon-nucléon, l'importance primordiale de l'o.p.e.p. pour la diffusion dans les états de moment angulaire élevé a été vérifiée et établie. Pour les termes d'échange à plus d'un pion, où la théorie ne donne pas des termes entièrement satisfaisants pour rendre compte de l'expérience, de nombreux auteurs ont introduit des termes semi-phénoménologiques [1, 2] dont la forme analytique, du type (1), rappelle celle qu'on obtient en théorie des champs.

On peut aussi remarquer que si l'on désire tenir compte dans l'interaction nucléon-nucléon des nouvelles résonances ρ et ω mises en évidence récemment, on est encore conduit [3], en interaction potentielle, à des termes de la forme (1).

c) Un autre aspect peut-être plus intéressant de l'utilisation de ces potentiels est le lien et la continuité qu'ils ont permis d'obtenir entre d'une part l'équation de Schrödinger donc un formalisme non relativiste et d'autre part les théories récentes des interactions fortes.

Ainsi la validité de la représentation de Mandelstam pour la diffusion par des potentiels du type (1) moins singuliers que r^{-2} à l'origine, donc de la forme

$$|\, C(\alpha)\,| < \text{Cte}\ \alpha^{1-\eta}\,, \tag{2}$$

a fait l'objet de nombreux travaux [4 à 7].

D'autres vérifications confirmaient et précisaient ces résultats. Par exemple, A. Martin [8 à 10] a étudié la structure analytique des ondes partielles de la diffusion nucléon-nucléon en théorie de Schrödinger pour des potentiels (1) et (2) ; cette structure analytique est la même que celle obtenue à partir de la représentation de Mandelstam. Un autre succès récent de la théorie du potentiel avec des potentiels des types (1) et (2) est évidemment les propriétés des pôles de Regge [4, 11, 12] et l'espoir que l'on a d'introduire correctement ce concept dans les interactions à hautes énergies. Il semble donc que les propriétés tirées de l'équation de Schrödinger pour (1) et (2) servent quelquefois de contrôle (représentation de Mandelstam) ou de guide (pôles de Regge) pour l'obtention d'un formalisme valable à haute énergie.

d) Enfin, en théorie du potentiel, ces potentiels sont particulièrement intéressants.

1° Quand on étudie les propriétés d'analyticité par rapport à l'énergie, ils permettent alors d'explorer commodément le second feuillet de Riemann, dit non physique, qui contient les résonances physiques et les états antiliés. Ceci reste vrai quand certains autres paramètres de l'équation de Schrödinger sont considérés comme complexes.

2° Ils permettent d'exprimer aisément les relations de dispersion et de relier les coupures aux potentiels nucléaires.

3° Enfin dans la résolution des solutions de l'équation de Schrödinger, ils permettent l'obtention de propriétés d'itération particulières. A. Martin [8, 9] a considéré sous forme de transformée de Laplace

$$\mathrm{e}^{ikr} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha r}\, \varrho_k(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha \tag{3}$$

la solution qui, asymptotiquement, se comporte comme une onde sortante $\exp(\mathrm{i}\, k\, r)$. Il a montré alors que la transformée inverse de Laplace $\varrho_k(\alpha)$ vérifie une équation intégrale de Volterra telle que n itérations donnent la solution exacte pour $\alpha \leqq \mathrm{n}\ \mu$. De plus ces n itérations sont déterminées entièrement par la connaissance de $C(\alpha)$ uniquement pour $\alpha \leqq \mathrm{n}\ \mu$.

Nous nous sommes proposé dans ce travail l'extension possible de divers aspects de ces propriétés rappelées en *b*), *c*) et *d*).

La première partie est consacrée à l'extension des propriétés d'itération en utilisant une transformation par rapport aux solutions ondes sortantes de l'équation de Schrödinger libre, donc des fonctions associées aux fonctions de Hankel sphériques. Au premier chapitre, nous étudions les propriétés de cette transformation et montrons qu'elle se ramène aux transformations de Laplace. En particulier pour les potentiels du type (1) les propriétés d'itération rappelées précédemment sont conservées. Au chapitre II nous étudions la transformation dans le cas d'ondes couplées. Ceci nous permet de définir pour la diffusion nucléon-nucléon un formalisme reliant d'une part les divers paramètres de potentiels semi-phénoménologiques du type (1) avec cœur dur, d'autre part les données expérimentales :

déphasages et paramètres de couplage. Etudiant la consistance du formalisme dans le cas où il n'y a plus de cœur dur pour des potentiels du type (1)-(2), des difficultés apparaissent si le potentiel tenseur n'est pas nul à l'origine.

Au chapitre III, indépendamment de toute transformation, nous étudions le problème de la détermination de la matrice S dans le cas de potentiels tenseurs non nuls à l'origine.

La deuxième partie de ce travail est consacrée aux propriétés d'analyticité. Nous cherchons d'abord à établir les propriétés analytiques pour l'onde ${}^1S_0$ de la diffusion proton-proton (chap. IV). Ceci nous conduit à une représentation intégrale de la fonction de portée effective. Au chapitre V nous utilisons des approximations simples de cette représentation intégrale pour tirer des informations sur la valeur numérique et le signe du paramètre de forme de la diffusion ${}^1S_0$ proton-proton. Enfin au chapitre VI, en analogie avec les travaux de Regge sur le potentiel centrifuge, nous étudions les propriétés d'analyticité par rapport à la « force » du potentiel et considérons les trajectoires correspondantes des pôles de la matrice S.

PREMIÈRE PARTIE

PROPRIÉTÉS D'ITÉRATION DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER POUR DES POTENTIELS DU TYPE DE YUKAWA

I. Transformation de l'équation de Schrödinger par des fonctions associées aux fonctions de Hankel sphériques

1. **Introduction.** — En étendant aux ondes $l \neq 0$ une méthode d'itération de A. Martin [8] basée sur l'application de la transformation de Laplace à l'équation de Schrödinger, il est utile de prendre des noyaux transformés de fonctions de Hankel. Nous montrons d'abord que ces transformations sont du type de Laplace, puis nous cherchons quelles classes de potentiels entraînent l'existence de ces noyaux et leur donnent la propriété permettant le procédé d'itération.

2. **Transformation de l'équation de Schrödinger par des fonctions associées aux fonctions de Hankel sphériques.** — Considérons l'équation radiale de Schrödinger pour une particule dans un potentiel central $V(r, a)$ de paramètre $a > 0$, $V(r, a)$ étant un potentiel décroissant plus vite que $1/r^2$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u_l(k, r) = V(r, a)\, u_l(k, r)\,, \tag{I.3}$$

k étant réel ou complexe. Cherchons une solution de la forme [1]

$$u_l(k, r) = \mathbf{h}_l(k\, r) + \int_0^\infty \mathbf{h}_l\big[(k + \mathbf{i}\,\alpha)\, r\big]\, \rho(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha\,, \tag{I.4}$$

$\mathbf{h}_l(\varrho)$ étant ϱ fois la fonction de « Hankel sphérique » de première espèce (onde sortante)

[1] Ceci a été suggéré par Mr le Professeur Fubini.

$$\text{(I.5)} \qquad \mathbf{h}_l(\rho) = (-\mathbf{i})^{l+1}\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\rho} \sum_{n=0}^{l} \left(\frac{\mathbf{i}}{2\rho}\right)^n a_{l,n}\,,$$

$$\text{(I.6)} \qquad a_{l,n} = (l+n)!/n!\,(l-n)!\,.$$

Si nous avons montré qu'il existe un noyau $\mathcal{K}_l$ tel que

$$\text{(I.7)} \qquad V(r, a)\, \mathbf{h}_l\big[(k + \mathbf{i}\beta)\, r\big] = \int_0^\infty \mathcal{K}_l(\alpha, \beta, a, k)\, \mathbf{h}_l\big[(k + \mathbf{i}\alpha)\, r\big]\, d\alpha\,,$$

la résolution de (I.3) se ramène à l'équation intégrale

$$\text{(I.8)} \quad \rho(\alpha)\, \big[\alpha\,(\alpha - 2\,\mathbf{i}\,k)\big] = \mathcal{K}_l(\alpha, 0, a, k) + \int_0^\infty \mathcal{K}_l(\alpha, \beta, a, k)\, \rho(\beta)\, d\beta\,.$$

Sous la forme (I.8) on voit donc que l'extension à $l \neq 0$ de la propriété d'itération [8] est :

Propriété A. — *Si le noyau* $\mathcal{K}_l$ *vérifie* $\mathcal{K}_l \equiv 0$ *pour* $\alpha < a + \beta$ $(a > 0, \beta > 0)$ *alors* $\rho(\alpha)$ *possède la propriété d'itération* A, *c'est-à-dire* $\rho_1 = \mathcal{K}_l(\alpha, 0, a, k) \equiv 0$ *pour* $\alpha < a$ *et, par récurrence, on voit que* $\rho_n(\alpha) \equiv 0$ *pour* $\alpha < n\,a$.

3. **Transformation par rapport à $\mathbf{h}_l\big[(k + \mathbf{i}\alpha)\, r\big]$ pour une fonction quelconque.** —

$$\text{(I.9)} \qquad f(r) = \int_0^\infty \mathcal{K}_l(\alpha, k)\, \mathbf{h}_l\big[(k + \mathbf{i}\alpha)\, r\big]\, d\alpha \qquad (k \neq -\mathbf{i}\varkappa,\ \varkappa > 0)\,,$$

$$\text{(I.10)} \qquad \frac{\partial}{\partial r}\big[r^l\, \mathbf{h}_l(k\,r)\big] = k\, r^l\, \mathbf{h}_{l-1}(k\,r)\,;$$

étant donnée la propriété (I.10) si nous appliquons aux deux membres de (I.9) l'opérateur $D_l = \mathbf{i}\, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}kr} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^l r^l$ nous avons ramené la transformation (I.9) à une transformation du type de Laplace, soit

$$D_l\big[f(r)\big] = \mathbf{i}\, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}kr} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^l \big[r^l\, f(r)\big]\,,$$

$$\text{(I.11a)} \qquad D_l\big[f(r)\big] = \int_0^\infty \mathcal{K}_l(\alpha, k)\, (k + \mathbf{i}\alpha)^l\, \mathbf{e}^{-\alpha r}\, d\alpha\,,$$

$$\text{(I.11b)} \quad \mathcal{K}_l(\alpha, k) = \frac{1}{(k + \mathbf{i}\alpha)^l} \left[\frac{1}{2\,\mathbf{i}\,\pi} \int_{-\mathbf{i}\infty + \tau_0}^{+\mathbf{i}\infty + \tau_0} \mathbf{e}^{\alpha r}\, D_l\big[f(r)\big]\, dr\right] \qquad (\tau_0 > 0)\,.$$

Pour l'existence de l'originale dans la transformation de Laplace, nous nous reportons à la proposition de L. Schwartz [13].

Propriété B. — Pour que $F(r)$ soit la transformée de Laplace d'une distribution $(T \in D'_+)$, il faut et il suffit qu'il existe un demi-plan $\mathrm{Re}\, r > c > 0$ dans lequel $F(r)$ holomorphe soit bornée en module par un polynôme en $|r|$.

Application à un potentiel $V(r, a)$. — Soit $a > 0$.

a) On peut voir [14] que si V et ses dérivées possèdent la propriété B, $D_l\{V(r, a)\, \mathbf{h}_l\big[(k + \mathbf{i}\beta)\, r\big]\}$ vérifie cette même propriété ; l'existence du noyau $\mathcal{K}_l$ dans (I.7) en résulte.

b) Par contre, pour des potentiels gaussiens ou oscillants [$\exp(-a r^2)$ ou $\exp(-a r)\cos b r$] ne vérifiant pas cette propriété B, les noyaux $\mathcal{K}_l$ correspondants n'existent plus, la propriété A non plus.

c) $V(r, a) = \exp(-a r) r^p$, où p est un entier algébrique. $\mathcal{K}_l$ existe d'après ce qui précède (propriété B). Pour ces potentiels, la propriété A existe aussi, comme on peut le voir directement [14], mais nous allons chercher une classe plus large de potentiels possédant cette propriété.

4. **Condition sur $V(r, a)$ pour que les $\mathcal{K}_l$ correspondants vérifient $\mathcal{K}_l = 0$ pour $\alpha < a + \beta$, propriété A.** — Nous supposons que $V(r, a)$ admet une originale (transformation inverse de Laplace).

Prenons l'originale [14] de (I.7) après multiplication par $\exp(-\mathbf{i} k r)$ on a

$$\mathcal{F}_l(\lambda, a, \beta) = \int_0^\infty \mathcal{K}_l(\alpha, a, \beta, k)\, \mathcal{G}_l(\lambda, \alpha)\, d\alpha\,, \tag{I.12}$$

$$\begin{cases} \mathcal{G}_l(\lambda, \alpha) \equiv 0 & (\lambda < \alpha) \\ \neq 0 & [\lambda > \alpha \ (\text{si } l \neq 0)]\,. \end{cases} \tag{I.13}$$

On peut voir [14] que la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{K}_l$ vérifie A est que

$$\mathcal{F}_l(\lambda, a, \beta) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad \lambda < a + \beta\,. \tag{I.14}$$

Donc prenant $V(r, a)$ de la forme $\exp(-a r)\,\Pi(r)$ et $\Pi(r)$ contenant des termes de la forme $\exp(b r)$, $b < a$, des fractions rationnelles, des polynômes en r ou r^{-1}, des fonctions logarithmiques de r, on peut voir que ces $V(r, a)$ vérifient A.

Par contre, si $V(r, a)$ ne contenant plus de facteurs en $\exp(-a r)$ est composé de fractions rationnelles ou de polynômes en r ou r^{-1} on a $\mathcal{F}_l(\lambda) = 0$ pour $\lambda < \beta$ donc pour $\lambda < \beta - \text{Cte}$ et la propriété A d'itération n'existe plus [en particulier (2) pour des combinaisons linéaires de Cte r^{-p}].

En particulier la propriété A d'itération existe donc pour :

1° $V(r, a) = \exp(-a r) r^{-p}$ si $p = 1$, $a = \mu$ [potentiel de Yukawa (3)] ou $p = 0$ (potentiel exponentiel).

Remarquons que $\exp(-a r) r^{-p}$ [p entier > 1] et $\exp(-b r) r^p$ [p entier $\geqq 0$] ont respectivement pour originales de Laplace $[1/(p-1)!]\,(\lambda - a)^{p-1}\,\theta(\lambda - a)$ et $\delta^{(p)}(\lambda - b)$; les propriétés (I.13) et (I.14) sont immédiates.

2° $$V(r, \mu) = \int_\mu^\infty \mathbf{e}^{-\gamma r} C(\gamma)\, d\gamma \tag{I.15}$$

qui est ce qu'on appelle les potentiels du type de Yukawa généralisés ou aussi potentiels superposition d'exponentielles, et que nous utiliserons dans les chapitres suivants dans deux cas :

a) $r_c = 0$, pas de cœur dur $|C(\gamma)| < \text{Cte}\,\gamma^{1-\varepsilon}$ qui assure que les potentiels sont

(2) A. Martin [9] a cependant montré, par transformation de Laplace de l'équation de Schrödinger pour $l \neq 0$ comment on peut réobtenir la propriété d'itération A quand le potentiel $l(l+1)/r^2$ est ajouté à un potentiel $\exp(-\mu r) f(r)$.

(3) V. de Alfaro & C. Rossetti [16], L. Bertocchi, C. Ceolin & N. Tonin [17] ont trouvé ce résultat par une méthode entièrement différente en utilisant un potentiel $\exp(-\mu r)/r$ et ont donné une expression du noyau correspondant. Nous n'avions pas eu connaissance des travaux de ces auteurs lorsque nous avons obtenu les résultats exposés dans ce chapitre.

moins singuliers que r^{-2} à l'origine et l'existence à l'origine de solutions de l'équation de Schrödinger ;

b) $r_c \neq 0$, $|C(\gamma)| < \text{Cte } \gamma^p$, où p est réel, positif et fini ; dans ce cas nous supposons l'existence d'un cœur dur pour la construction de potentiels semi-phénoménologiques.

5. **Détermination des noyaux $\mathcal{H}_l$.** — D'après (I.11) pour un potentiel $V(r, a)$ quelconque, $(k + \mathbf{i}\alpha)^l \mathcal{H}_l$ est l'originale de $D_1^l V\, \mathbf{h}_l((k + \mathbf{i}\beta) r)$. Ceci a été étudié [14]. Pour un potentiel du type (I.15), il suffit de déterminer le noyau $\mathcal{K}_l(\alpha, \beta, \gamma, k)$ correspondant au potentiel exponentiel $\exp(-\gamma r)$; en effet dans ce cas $\mathcal{H}_l$ et $\mathcal{K}_l$ sont reliés par

$$\mathcal{H}_l(\alpha, \beta, \mu, k) = \int_{\mu}^{\alpha-\beta} C(\gamma)\, \mathcal{K}_l(\alpha, \beta, \gamma, k)\, d\gamma .$$

Sous cette forme la propriété $\mathcal{H}_l \equiv 0$ pour $\alpha < \mu + \beta$ est évidente. Les noyaux $\mathcal{K}_l$ ont été déterminés [14]. Nous donnons, à titre d'illustration, les premiers :

$$l = 0, \quad \mathcal{K}_0 = \delta(\alpha - \beta - \gamma) ;$$

$$l = 1, \quad \mathcal{K}_1(\alpha, \beta, \gamma, k) = \delta(\alpha - \beta - \gamma) - \frac{\gamma\, \theta(\alpha - \beta - \gamma)}{(k + \mathbf{i}\beta)(k + \mathbf{i}\alpha)} ;$$

$$l = 2, \quad \mathcal{K}_2 = \delta(\alpha - \gamma - \beta) - \frac{\theta(\alpha - \beta - \gamma)}{(k + \mathbf{i}\alpha)^2} \left[\frac{3\gamma\,[k + \mathbf{i}(\gamma + \beta)]}{k + \mathbf{i}\beta} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\gamma\,(\alpha - \gamma - \beta)}{(k + \mathbf{i}\beta)^2} \left(\mathbf{i}k - \frac{\alpha + \gamma + \beta}{2} \right) \right] .$$

Remarques. — 1. Pour un potentiel de Yukawa $\exp(-\gamma r)\, r^{-1}$ les noyaux correspondants sont les primitives (par rapport à la variable $-\gamma$) des noyaux $\mathcal{K}_l(\alpha, \beta, \gamma, k)$ relatifs au potentiel exponentiel $\exp(-\gamma r)$.

2. Nous pouvons comprendre pourquoi la méthode de transformation étudiée dans ce chapitre conserve la propriété d'itération particulière montrée par A. Martin. En effet cette transformation se ramenant à une transformation de Laplace, on peut voir que le second membre de (I.8) se comporte comme un « pseudo-produit » de convolution.

II. Application de la transformation par les fonctions de Hankel à la détermination de potentiels semi-phénoménologiques

1. **Introduction et potentiels semi-phénoménologiques.** — Les progrès réalisés et les nombreuses études portant sur l'analyse en déphasage de la diffusion nucléon-nucléon jusqu'à 400 MeV permettent d'espérer dans un avenir proche une connaissance non ambiguë de ces déphasages. On peut donc prendre ces déphasages expérimentaux comme point de départ et essayer de les relier d'une façon pratique avec une famille de potentiels cohérente avec les considérations théoriques. Ces considérations aussi bien que les données de l'expérience nous astreignent à inclure

l'o.p.e.p. Nous tiendrons compte aussi d'un cœur dur de rayon $r_c \neq 0$. Les potentiels semi-phénoménologiques généralement considérés [1, 2] ont ces caractéristiques et sont habituellement choisis dans une classe de potentiels de la forme $\sum_{n>0,p} \exp(-n\mu r) r^{-p}$ (n et p entiers). Or nous avons vu au chapitre I que la méthode de transformation par les fonctions de Hankel s'applique pour des potentiels de ce type. Pour la diffusion nucléon-nucléon il sera cependant nécessaire d'étendre le formalisme aux états couplés où intervient le potentiel tenseur. Nous considérons pour la diffusion proton-proton la famille de potentiels (II.1) s'accordant avec les considérations habituelles d'invariance [18] ; pour le système neutron-proton un terme similaire à (II.1) doit être ajouté correspondant à l'isospin I = 0,

$$(II.1) \qquad V = V_C + \vec{\sigma_1}.\vec{\sigma_2}\, V_\sigma + V_{LS}\, \vec{L}.\vec{S} + V_T\, S_{12} + \\ + \tfrac{1}{2} V_Q\big((\vec{L}.\vec{\sigma_1})(\vec{L}.\vec{\sigma_2}) + (\vec{L}.\vec{\sigma_2})(\vec{L}.\vec{\sigma_1})\big) .$$

Les potentiels semi-phénoménologiques auront les caractères habituels :

a) *région interne* : purement phénoménologiques, cœur dur pour $r \leqq r_c$;

b) *région externe* : prédominance de l'o.p.e.p. (II.2)

$$(II.2) \qquad \frac{f^2}{4\pi}\frac{1}{3}(\vec{I}_1.\vec{I}_2)\left[\vec{\sigma_1}.\vec{\sigma_2} + S_{12}\left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2}\right)\right]\frac{\exp(-\mu r)}{\mu r} ;$$

c) *région moyenne* : les divers V_i appartiendront à la famille (II.3) [p_0 réel, positif et fini]

$$(II.3) \qquad V_i(r) = \int_\mu^\infty C_i(\gamma)\, e^{-\gamma r}\, d\gamma , \qquad |C_i(\gamma)| < M_i\, \gamma^{p_0} ;$$

étant données la condition *b*) et la forme des $V_i(r)$, les transformés $C_i(\gamma)$ s'identifieront à l'o.p.e.p. pour $\gamma \in [\mu, 2\mu]$.

Au paragraphe II.2 nous étudions le cas des équations non couplées (singulet, triplet L = J), au paragraphe II.3 celui des équations couplées avec $r_c \neq 0$. Dans tous les cas nous montrerons la cohérence de notre formalisme pour $r_c = 0$; ceci nous amènera à poser le problème de la détermination de la matrice S dans le cas de potentiels tenseurs non nuls à l'origine, problème qui sera étudié dans le chapitre III.

2. **Equations non couplées.** — a) $r_c \neq 0$. — Nous posons dans l'équation de Schrödinger la variable radiale égale à $r_c + r$, où $r > 0$:

$$(II.4) \qquad \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{(r_c+r)^2}\right) u_l(r_c + r) = V(r_c + r)\, u_l(r_c + r) ;$$

V est une combinaison linéaire de potentiels de la famille (II.3) où nous avons omis la dépendance en l. Pour définir la matrice S_l nous utilisons une méthode donnée par de Alfaro & Rossetti [16] pour $r_c = 0$. Les solutions de (II.4) sortantes sont définies par

$$(II.5) \qquad R_l(k, r_c + r) = \int_0^\infty \mathbf{h}_l\big[(k + i\alpha)(r_c + r)\big]\, \rho_k(\alpha)\, d\alpha \underset{r\to\infty}{\simeq} \mathbf{h}_l\big[k(r_c + r)\big] ,$$

où $\mathbf{h}_l(x)$ est donné par (I.5).

Ceci est strictement équivalent à la définition (I.4) que nous prenions, mais ici la condition asymptotique est incluse dans la transformation. L'avantage est d'écrire plus simplement les termes libres des équations de Volterra des transformés ρ. Soit une solution $u_1(r_c + r) = R_1(-k, r_c + r) - (-1)^1 S_1(k) R_1(k, r_c + r)$; la condition $u_1(r_c) = 0$ donne

$$S_1(k) = (-1)^1 R_1(-k, r_c)/R_1(k, r_c) . \tag{II.6}$$

La détermination de $x_{+k}(\alpha) = \rho_k(\alpha) \exp(-\alpha r_c)$ se fait par la résolution d'une équation de Volterra

$$x_k(\alpha) = \delta(\alpha) + B(\alpha, k) \int_0^{\alpha-\mu} G_1(\alpha, \beta, k)\, x_k(\beta)\, d\beta , \tag{II.7}$$

où $G_1 \equiv 0$ pour $\beta > \alpha - \mu$, $B(\alpha, k) = [\alpha(\alpha - 2\,i\,k)]^{-1}$. $\mathcal{K}_1(\alpha, \beta, \gamma, k)$ étant le noyau correspondant à un potentiel $\exp(-\gamma r)$ déterminé dans le chapitre I, on a

$$G_1(\alpha, \beta, k) = \exp[-(\alpha - \beta) r_c] \int_\mu^{\alpha-\beta} \mathcal{K}_1(\alpha, \beta, \gamma, k)\, C(\gamma)\, d\gamma . \tag{II.8}$$

Nous savons [15] que pour k réel $|x_k(\alpha)| < |B(\alpha, k)|$ l'existence de $R_1(k, r_c)$ en résulte. Soit

$$f_1[(k + i\alpha) r_c] = i^{l+1} \exp(\alpha r_c) \exp(-i k r_c)\, h_1[(k + i\alpha) r_c] ,$$

d'où

$$S_1^{(1)}(k) = (-1)^1 S_1(k) \exp(2 i k r_c) = \mathcal{R}_1(-k, r_c)/\mathcal{R}_1(k, r_c) ,$$

où

$$\mathcal{R}_1(k, r_c) = f_1(k, r_c) + \int_\mu^\infty f_1[(k + i\alpha) r_c]\, x_k(\alpha)\, d\alpha ; \tag{II.9}$$

comme $\mathcal{K}_1(k) = [\mathcal{K}_1(-k^*)]^*$, on déduit $\mathcal{R}_1(k) = \mathcal{R}_1^*(-k^*)$; on a donc d'une part les propriétés habituelles

$$S_1(k) = 1/S_1(-k) , \qquad S_1(k^*) = [S_1^*(k)]^{-1} , \qquad S_1(k) = S_1^*(-k^*) ,$$

d'autre part si k est réel $\mathcal{R}_1(k)$ a pour phase $-[\delta + k r_c + l(\pi/2)]$

On déduit de (II.7) une équation intégrale semblable pour

$$f_1[(k + i\alpha) r_c]\, x_k(\alpha) = a_k(\alpha) - i\, b_k(\alpha).$$

Pour k réel les fonctions a_k et b_k vérifient le système réel couplé

$$\begin{bmatrix} a_k(\alpha) \\ b_k(\alpha) \end{bmatrix} = \delta(\alpha) \begin{bmatrix} a_{0k} \\ b_{0k} \end{bmatrix} + \int_0^{\alpha-\mu} \begin{bmatrix} \operatorname{Re} g & \operatorname{Im} g \\ -\operatorname{Im} g & \operatorname{Re} g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k(\beta) \\ b_k(\beta) \end{bmatrix} d\beta , \tag{II.10}$$

où $a_{0k} - i\, b_{0k} = f_1(k r_c)$ et $\operatorname{Re} g$, $\operatorname{Im} g$ sont les parties réelle et imaginaire de

$$g(\alpha, \beta, k) = B(\alpha, k)\, G_1(\alpha, \beta, k)\, f_1[(k + i\alpha) r_c] \left\{ f_1[(k + i\beta) r_c] \right\}^{-1} .$$

Ces quantités se déterminent aisément si on remarque que pour k réel $g(k) = g^*(-k)$, $f_1(k) = f_1^*(-k)$; finalement

$$\operatorname{tg}\left[\delta + k r_c + l\frac{\pi}{2}\right] = \int_0^\infty b_k(\alpha)\, d\alpha \Big/ \int_0^\infty a_k(\alpha)\, d\alpha . \tag{II.11}$$

b) $r_c = 0$. — Le cas $r_c = 0$ a été étudié par A. Martin [9] pour la transformation de Laplace.

Pour une transformation du type (II.5) il est clair que la méthode et les résultats donnés pour $\exp(-\mu r) r^{-1}$ par de Alfaro & Rossetti [16] s'étendent pour $|C(\gamma)| < \text{Cte}\ \gamma^{\xi-1}$ $(\xi < 1)$.

Nous donnons le résultat $[\rho_k(\alpha)$ vérifiant (II.7]

$$(\text{II}.12)\quad S_l(k) = (-1)^l \frac{\lim_{r\to 0} r^l R_l(-k, r)}{\lim_{r\to 0} r^l R_l(k, r)} = \left[(-k)^{-l} + \int_\mu^\infty \frac{\rho_{-k}(\alpha)}{(-k + \mathbf{i}\alpha)^l}\, d\alpha\right] \Big/ \left[k^{-l} + \int_\mu^\infty \frac{\rho_k(\alpha)}{(k + \mathbf{i}\alpha)^l}\, d\alpha\right].$$

A l'encontre de ce qui se passe dans le cas couplé, comme nous le verrons, il n'y a ici aucune difficulté à extraire les parties singulières à l'origine des ondes sortantes et entrantes $R_l(\pm k, r)$.

3. **Equations couplées.** — Nous considérons d'abord le cas $r_c \neq 0$,

$$(\text{II}.13)\quad \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{J(J-1)}{(r_c + r)^2} + V_1(r_c + r), & V_T(r_c + r) \\ V_T(r_c + r), & \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{(J+1)(J+2)}{(r_c + r)^2} + V_2(r_c + r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_J \\ w_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nous avons omis la dépendance en J des divers V_i appartenant à la famille (II.3). Nous désirons relier simplement les potentiels et les données expérimentales : déphasages propres δ_α, δ_β et le paramètre de mélange ε de Blatt & Biedenharn [19]. Pour chaque valeur propre α ou β nous allons définir deux solutions propres déterminées par des conditions asymptotiques d'ondes entrantes ou sortantes. Nous aurons ainsi un ensemble de quatre solutions linéairement indépendantes pour définir la matrice $\boldsymbol{S}$. Etant données les propriétés bien connues de la diagonalisation de la matrice $\boldsymbol{S}$ par la méthode de Blatt & Biedenharn, le vecteur propre onde sortante $\Psi_{(\alpha)}(k, r_c + r)$ correspondant à la valeur propre S_α peut se définir par

$$(\text{II}.14)\quad \Psi_{(\alpha)}(k, r_c + r) = \cos\varepsilon\, \Psi_1(k, r_c + r) + \sin\varepsilon\, \Psi_2(k, r_c + r),$$

où Ψ_1 et Ψ_2 sont des solutions de (II.13) telles que, pour la famille de potentiels considérée (II.3),

$$\Psi_1 \underset{r\to\infty}{\simeq} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{J-1}[k(r_c + r)] \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi_2 \underset{r\to\infty}{\simeq} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{h}_{J+1}[k(r_c + r)] \end{bmatrix}.$$

Le vecteur propre $\Psi_{(\beta)}(k, r_c + r)$, comme il est bien connu, est orthogonal à $\Psi(\alpha)$ sur cette base $[\Psi_1(k, r_c + r), \Psi_2(k, r_c + r)]$, donc

$$\Psi_{(\beta)}(k, r_c + r) = -\sin\varepsilon\, \Psi_1 + \cos\varepsilon\, \Psi_2.$$

Pour la suite nous faisons nos raisonnements sur un seul état propre α seulement. Comme pour les équations non couplées, nous allons utiliser la transformation étudiée au chapitre I, soit

$$(\text{II}.15)\quad \Psi_{(\alpha)}(k, r_c + r) = \begin{vmatrix} R(k, r_c + r) \\ \\ T(k, r_c + r) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \int_0^\infty \mathbf{h}_{J-1}\left[(k + \mathbf{i}\,\alpha)\,(r_c + r)\right] \rho_k(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\ \\ \int_0^\infty \mathbf{h}_{J+1}\left[(k + \mathbf{i}\,\alpha)\,(r_c + r)\right] \tau_k(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \end{vmatrix} \underset{r\to\infty}{\simeq} \begin{bmatrix} \cos\varepsilon\ \mathbf{h}_{J-1}\left[k\,(r_c + r)\right] \\ \\ \sin\varepsilon\ \mathbf{h}_{J+1}\left[k\,(r_c + r)\right] \end{bmatrix}.$$

La solution physique correspondant à la valeur propre α sera

$$(\text{II}.16)\quad \Psi_{(\alpha)}(-k, r_c + r) - \mathbf{e}^{2\mathbf{i}\delta_\alpha}\,(-1)^{J-1}\,\Psi_{(\alpha)}(k, r_c + r) = \begin{bmatrix} u_J(r_c + r) \\ w_J(r_c + r) \end{bmatrix}$$

$$\underset{r\to\infty}{\simeq} \begin{bmatrix} \cos\varepsilon\ \{\mathbf{h}_{J-1}\left[-k\,(r_c + r)\right] - (-1)^{J-1}\,\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\delta_\alpha}\,\mathbf{h}_{J-1}\left[k\,(r_c + r)\right]\} \\ \sin\varepsilon\ \{\mathbf{h}_{J+1}\left[-k\,(r_c + r)\right] - (-1)^{J+1}\,\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\delta_\alpha}\,\mathbf{h}_{J+1}\left[k\,(r_c + r)\right]\} \end{bmatrix}.$$

La condition de régularité $u_J(r_c) = w_J(r_c) = 0$ donnant

$$(\text{II}.17)\quad (-1)^{J-1}\exp(2\,\mathbf{i}\,\delta_\alpha) = R(-k, r_c)/R(k, r_c) = T(-k, r_c)/T(k, r_c)\,,$$

$x_k = \rho_k \exp(-\alpha\, r_c)$, $y_k = \tau_k \exp(-\alpha\, r_c)$ satisfont une équation intégrale de Volterra qui se déduit aisément en portant les solutions (II.15) dans (II.13)

$$(\text{II}.18)\quad \begin{bmatrix} x_k(\alpha) \\ y_k(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(\alpha) \\ y_0(\alpha) \end{bmatrix} + B(\alpha, k) \int_0^{\alpha+\mu} \begin{bmatrix} G_{J-1}^{J-1} & G_{J-1}^{J+1} \\ G_{J+1}^{J-1} & G_{J+1}^{J+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k(\beta) \\ y_k(\beta) \end{bmatrix} \mathrm{d}\beta\,,$$

où, avec $\eta = \pm 1$, $G_{J+\eta}^{J\pm\eta}(\alpha, \beta, k)$ indépendant de ε, nul pour $\alpha < \beta + \mu$, est défini par

$$(\text{II}.19)\quad G_{J+\eta}^{J\pm\eta}(\alpha, \beta, k) = \mathbf{e}^{-(\alpha-\beta)r_c} \int_\mu^{\alpha-\mu} C_{+\eta}^{\pm\eta}(\gamma)\ \mathcal{K}_{J+\eta}^{J\pm\eta}(\alpha, \beta, \gamma, k)\,\mathrm{d}\gamma\,,$$

$$(\text{II}.20)\quad \mathbf{e}^{-\gamma(r_c+r)}\ \mathbf{h}_{J\pm\eta}\left[(k + \mathbf{i}\,\beta)\,(r_c + r)\right] =$$

$$= \int_0^\infty \mathcal{K}_{J+\eta}^{J\pm\eta}(\alpha, \beta, \gamma, k)\ \mathbf{h}_{J+\eta}\left[(k + \mathbf{i}\,\alpha)\,(r_c + r)\right] \mathrm{d}\alpha \quad (J = 1, 2, \ldots)\,;$$

le terme libre de (II.18) vient des conditions asymptotiques (en r) de (II.15)

$$(\text{II}.21)\qquad \begin{bmatrix} x_0(\alpha) \\ y_0(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon \\ \sin\varepsilon \end{bmatrix} \delta(\alpha)\,.$$

Les noyaux $\mathcal{K}_{J+\eta}^{J\pm\eta}$ sont donc les extensions au cas couplé des noyaux $\mathcal{K}_1$ introduits au chapitre I. Les expressions et déterminations de ces noyaux ont été données [15]. A titre d'exemple, pour J = 1 on a

$$\mathcal{K}_0^0 = \delta(\alpha - \gamma - \beta),\quad \mathcal{K}_0^2 = -\,\delta(\alpha - \gamma - \beta) + 3\,\theta(\alpha - \gamma - \beta)\left[\frac{-\,\mathbf{i}\,k + \alpha - \gamma}{(k + \mathbf{i}\,\beta)^2}\right],$$

$$\mathcal{K}_2^0 = -\,\delta(\alpha - \gamma - \beta) + \theta(\alpha - \gamma - \beta)\left\{\frac{3\,\mathbf{i}\,[k + \mathbf{i}\,(\gamma + \beta)]}{(k + \mathbf{i}\,\alpha)^2}\right\},\quad \mathcal{K}_2^2 = \mathcal{K}_2\,.$$

Nous savons [15] que pour les conditions initiales (en α) (II.21) et k réel,

$$\begin{bmatrix} |\,x_k(\alpha)\,| \\ |\,y_k(\alpha)\,| \end{bmatrix} \underset{\alpha\to\infty}{<} \begin{bmatrix} |\,B(\alpha, k)\,| \\ |\,B(\alpha, k)\,| \end{bmatrix};$$

l'existence de $R(k, r_c)$ et $T(k, r_c)$ en résulte. Comme dans le cas des équations non couplées, si on pose

$$\text{(II.22)} \qquad \begin{bmatrix} \mathcal{R}(k, r_c) \\ \mathcal{T}(k, r_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^\infty f_{J-1}[(k + i\alpha) r_c]\, x_k(\alpha)\, d\alpha \\ \int_0^\infty f_{J+1}[(k + i\alpha) r_c]\, y_k(\alpha)\, d\alpha \end{bmatrix},$$

$$\text{(II.23)} \quad \exp\left\{ 2i \left[\delta + k r_c + (J - 1) \frac{\pi}{2} \right] \right\} = \frac{\mathcal{R}(-k, r_c)}{\mathcal{R}(k, r_c)} = \frac{\mathcal{T}(-k, r_c)}{\mathcal{T}(k, r_c)}.$$

Etant donné le caractère linéaire des équations intégrales (II.18) et le fait que le paramètre de mélange ε n'apparaît que dans le terme libre (II.21), on peut sortir la dépendance explicite de ce paramètre, correspondant à la décomposition (II.14)

$$\begin{bmatrix} x_0(\alpha) \\ y_0(\alpha) \end{bmatrix} = \cos\varepsilon \begin{bmatrix} \delta(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} + \sin\varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(\alpha) \end{bmatrix},$$

d'où

$$\begin{bmatrix} x_k(\alpha) \\ y_k(\alpha) \end{bmatrix} = \cos\varepsilon \begin{bmatrix} x_k^{(1)}(\alpha) \\ y_k^{(1)}(\alpha) \end{bmatrix} + \sin\varepsilon \begin{bmatrix} x_k^{(2)}(\alpha) \\ y_k^{(2)}(\alpha) \end{bmatrix}$$

et

$$\text{(II.24)} \qquad \begin{bmatrix} \mathcal{R}(k, r_c) \\ \mathcal{T}(k, r_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon\ \mathcal{R}^{(1)}(k, r_c) + \sin\varepsilon\ \mathcal{R}^{(2)}(k, r_c) \\ \cos\varepsilon\ \mathcal{T}^{(1)}(k, r_c) + \sin\varepsilon\ \mathcal{T}^{(2)}(k, r_c) \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{R}^{(i)}, \mathcal{T}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ sont indépendants de ε. (II.18), (II.23) et (II.24) déterminent indépendamment δ_α et ε. Etant donné que $\mathcal{K}^{J\pm\eta}_{J+\eta}(k) = [\mathcal{K}^{J\pm\eta}_{J+\eta}(-k^*)]^*$ et que $f_J[(k - i\alpha) r_c] = \{f_J[(-k^* + i\alpha) r_c]\}^*$, on voit que pour k réel $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ ont pour phase $-[\delta + k r_c + (J - 1)(\pi/2)]$. On déduit de (II.18) un système intégral semblable pour

$$\begin{bmatrix} f_{J-1}[(k + i\alpha) r_c]\, x_k(x) \\ f_{J+1}[(k + i\alpha) r_c]\, y_k(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k(\alpha) - i\, b_k(\alpha) \\ c_k(\alpha) - i\, d_k(\alpha) \end{bmatrix},$$

où a, b, c, d vérifient un système couplé réel de Volterra

$$\text{(II.25)} \qquad \begin{bmatrix} a_k(\alpha) \\ b_k(\alpha) \\ c_k(\alpha) \\ d_k(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} + \int_0^{\alpha-\mu} \begin{bmatrix} \operatorname{Re} g_{-1}^{-1} & \operatorname{Im} g_{-1}^{-1} & \operatorname{Re} g_{-1}^{+1} & \operatorname{Im} g_{-1}^{+1} \\ -\operatorname{Im} g_{-1}^{-1} & \operatorname{Re} g_{-1}^{-1} & -\operatorname{Im} g_{-1}^{+1} & \operatorname{Re} g_{-1}^{+1} \\ \operatorname{Re} g_{+1}^{-1} & \operatorname{Im} g_{+1}^{-1} & \operatorname{Re} g_{+1}^{+1} & \operatorname{Im} g_{+1}^{+1} \\ -\operatorname{Im} g_{+1}^{-1} & \operatorname{Re} g_{+1}^{-1} & -\operatorname{Im} g_{+1}^{+1} & \operatorname{Re} g_{+1}^{+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k(\beta) \\ b_k(\beta) \\ c_k(\beta) \\ d_k(\beta) \end{bmatrix} d\beta,$$

où

$$g^{J\pm\eta}_{J+\eta}(\alpha, \beta, k) = B(\alpha, k)\, G^{J\pm\eta}_{J+\eta}(\alpha, \beta, k) \frac{f_{J+\eta}[(k + i\alpha) r_c]}{f_{J\pm\eta}[(k + i\beta) r_c]},\ g^{J\pm\eta}_{J+\eta}(k) = [g^{J\pm\eta}_{J+\eta}(-k^*)]^*$$

et

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \delta(\alpha) \begin{bmatrix} \cos\varepsilon & \operatorname{Re} f_{J-1}(k r_c) \\ -\cos\varepsilon & \operatorname{Im} f_{J-1}(k r_c) \\ \sin\varepsilon & \operatorname{Re} f_{J+1}(k r_c) \\ -\sin\varepsilon & \operatorname{Im} f_{J+1}(k r_c) \end{bmatrix} =$$

$$= \delta(\alpha)\cos\varepsilon \begin{bmatrix} \operatorname{Re} f_{J-1} \\ -\operatorname{Im} f_{J-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta(\alpha)\sin\varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{Re} f_{J+1} \\ -\operatorname{Im} f_{J+1} \end{bmatrix},$$

d'où

$$\text{(II.26)} \qquad \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \\ c(\alpha) \\ d(\alpha) \end{bmatrix} = \cos\varepsilon \begin{bmatrix} a_1(\alpha) \\ b_1(\alpha) \\ c_1(\alpha) \\ d_1(\alpha) \end{bmatrix} + \sin\varepsilon \begin{bmatrix} a_2(\alpha) \\ b_2(\alpha) \\ c_2(\alpha) \\ d_2(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\text{(II.27)} \quad \operatorname{tg}\left[\delta_\alpha + k r_c + (J-1)\frac{\pi}{2}\right] = \int_0^\infty b(\alpha)\,d\alpha \Big/ \int_0^\infty a(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \int_0^\infty d(\alpha)\,d\alpha \Big/ \int_0^\infty c(\alpha)\,d\alpha\,.$$

Les équations (II.25), (II.26) et (II.27) permettent de relier ε et δ_α aux paramètres des potentiels. On obtient des équations semblables pour la valeur propre δ_β en changeant les conditions asymptotiques (II.15).

Montrons la cohérence de notre formalisme pour $r_c = 0$. Si on suppose $V_T(r) \underset{r\to 0}{\simeq} V_{T_0} r^{-\varepsilon_T}$ ($V_{T_0} = \text{Cte}$, $\varepsilon_T < 2$) et les potentiels non tenseurs moins singuliers que r^{-2} à l'origine, on trouve (chap. III) comme système fondamental de solutions, au voisinage de $r = 0$, quatre solutions dont deux « singulières » de la forme

$$\text{(II.28)} \qquad \begin{bmatrix} r^{-(J-1)}\varphi(r) \\ r^{-(J-3+\varepsilon_T)}\psi(r) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} r^{-(J-1+\varepsilon_T)}\varphi(r) \\ r^{-(J+1)}\psi(r) \end{bmatrix}.$$

On étudie le cas $0 < \varepsilon_T < 2$. Nous considérons toujours la solution du type (II.15) [où $r_c = 0$] ; le système intégral (II.18) est valable pour $\rho_k(\alpha)$, $\tau_k(\alpha)$ [où $r_c = 0$ dans $G^{J\pm\eta}_{J+\eta}$], la condition de régularité est maintenant remplacée par

$$\text{(II.29)} \quad e^{2i\delta_\alpha}(-1)^{J-1} = \frac{\lim\limits_{r\to 0} r^{J-1+\varepsilon_T} R(-k, r)}{\lim\limits_{r\to 0} r^{J-1+\varepsilon_T} R(k, r)} = \frac{\lim\limits_{r\to 0} r^{J+1} T(-k, r)}{\lim\limits_{r\to 0} r^{J+1} T(k, r)}.$$

Nous pouvons justifier l'existence [15] de ces limites pour la famille

$$\text{(II.30)} \quad |C_T(\gamma)| < M_T \gamma^{\varepsilon_T - 1}, \qquad |C_i(\gamma)| < M_i \gamma^{\xi_i - 1} \qquad (0 < \xi_i < 2)\,.$$

La relation (II.29) permet, si ε est donné, de relier δ_α aux divers potentiels. Peut-on déterminer à la fois ε et δ comme dans le cas $r_c \neq 0$. En fait, comme nous le verrons au chapitre III, une décomposition du type (II.14) et des conditions (II.29) ne peuvent déterminer δ et ε indépendamment. La raison profonde est que pour construire la matrice $\boldsymbol{S}$ à partir de solutions de l'équation de Schrödinger sans cœur dur, il est nécessaire d'avoir réussi à éliminer toutes les contributions singulières à l'origine de ces solutions et (II.29) n'élimine que la plus singulière.

Si $\varepsilon_T = 0$ ou $V_T(0)$ fini, non nul nous verrons que le problème reste le même.

Par contre [4], si $\varepsilon_T \neq 0$ c'est-à-dire $V_T(0) = 0$, le problème est entièrement soluble :

$$e^{2i\delta_J}(-1)^{J-1} = \lim_{r\to 0} r^{J-1} R(-k, r) \Big/ \lim_{r\to 0} r^{J-1} R(k, r)$$
$$= \lim_{r\to 0} r^{J+1} T(-k, r) \Big/ \lim_{r\to 0} r^{J+1} T(k, r) .$$

En effet, les deux dernières relations, quand on explicite la dépendance par rapport au paramètre ε de mélange, restent indépendantes. Dans le chapitre suivant, indépendamment de toute transformation, nous allons examiner le problème de la détermination de la matrice S quand $V_T(0) \neq 0$.

III. Détermination de la matrice S dans le cas de potentiels tenseurs non nuls à l'origine

Pour obtenir la matrice S en mécanique quantique non relativiste dans le cas non couplé on utilise deux méthodes : 1° on construit la solution régulière en partant de l'origine, c'est ce que l'on fait dans les calculs numériques ; 2° on considère une base de solutions définies par leur comportement asymptotique d'ondes entrantes ou sortantes, on construit les « fonctions de Jost » en imposant la condition de régularité à l'origine, à la solution physique, combinaison linéaire des éléments de la base.

On peut généraliser ces méthodes au cas couplé. Néanmoins ceci nécessite certaines précautions si le potentiel tenseur est non nul ou singulier à l'origine. En effet le comportement à l'origine d'une solution régulière générale ou d'une solution singulière générale ne coïncide plus avec le comportement correspondant des solutions non couplées. En ce qui concerne la première méthode, il est nécessaire d'établir tout d'abord le degré des solutions régulières à l'origine avant d'effectuer l'intégration des équations. Dans la seconde méthode, pour la détermination des solutions propres physiques la situation est plus délicate car une des solutions irrégulières étant plus singulière que l'autre, le procédé habituel d'extraction de la partie singulière ne s'applique qu'à la solution la plus singulière. Nous allons montrer comment, dans certains cas, par un développement limité de cette solution la plus singulière, on peut éliminer la contribution venant de l'autre solution singulière.

1. **Détermination des états propres.** — Nous considérons l'équation des ondes couplées sans cœur dur

$$\begin{bmatrix} r^2\dfrac{d^2}{dr^2} - J(J-1) + k^2r^2 + r^2 V^{(1)}(r), & r^2 V^T(r) \\ r^2 V^T(r), & r^2\dfrac{d^2}{dr^2} - (J+1)(J+2) + k^2 r^2 + r^2 V^{(2)}(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_J \\ w_J \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv L \begin{bmatrix} u_J \\ w_J \end{bmatrix} \equiv 0, \qquad \text{(III.1)}$$

[4] R. Vinh-Mau & A. Martin [20], indépendamment et par une toute autre méthode, ont donné une résolution à caractère itératif des solutions couplées. Leur formalisme, valable dans ce cas $V_T(0) = 0$ leur a permis d'obtenir les propriétés d'analyticité de la matrice S.

$V^{(1)}$, $V^{(2)}$, V^{T} étant les combinaisons habituelles de potentiels $V_C(r)$, $V_T(r)$, $V_{LS}(r)$, $V_Q(r)$ que nous supposons à décroissance exponentielle quand $r \to \infty$ et moins singuliers que r^{-2} à l'origine.

A) Système fondamental pour $r \to 0$. — Si on suppose $V_T(r) \underset{r\to 0}{\simeq} V_0^T r^{-\varepsilon_T}$ et les potentiels non tenseurs de la forme $V_i(r) \underset{r\to 0}{\simeq} \text{Cte}\, r^{-\xi_i}$ (ε_T et ξ_i étant inférieurs à 2) on trouve comme système fondamental deux solutions « régulières » (nulles pour $r = 0$) et deux solutions « singulières », d'où pour toute Ψ solution de (III.1)

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \underset{r\to 0}{\simeq} \sum_{j=1}^{4} \begin{bmatrix} r^{\lambda_j}\, \varphi_j(r) \\ r^{\mu_j}\, \psi_j(r) \end{bmatrix}. \tag{III.2}$$

$$\Psi \simeq \begin{bmatrix} r^{J+4-\varepsilon_T}\, \varphi_1(r) \\ r^{J+2}\, \psi_1(r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r^{J}\, \varphi_2(r) \\ r^{J+2-\varepsilon_T}\, \psi_2(r) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r^{(J-1)}\, \varphi_3(r) \\ r^{-(J-3+\varepsilon_T)}\, \psi_3(r) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r^{-(J-1+\varepsilon_T)}\, \varphi_4(r) \\ r^{-(J+1)}\, \psi_4(r) \end{bmatrix}.$$

Si $\varepsilon_T = 0$ le deuxième terme en w devient $r^{J+2}(\operatorname{Log} r)\, \psi_2(r)$ et le dernier terme en u : $r^{-(J-1)}(\operatorname{Log} r)\, \varphi_4(r)$; pour tout j on a $\psi_j(0) = C_j\, \varphi_j(0)$ où C_j *réel ne dépend que des coefficients du système différentiel* (III.1), C_j *dépend de* J, ε_T *et du couplage* V_0^T, C_j *est indépendant de* k.

Nous voyons ici la différence essentielle entre les équations couplées et non couplées. Dans le cas d'équations couplées le degré de singularité (ou de régularité) du potentiel tenseur apparaît explicitement dans le comportement des solutions à l'origine. Ce comportement n'est donc *plus déterminé uniquement par les potentiels centrifuges*. Ceci a de nombreuses conséquences. Considérons maintenant le comportement d'une solution « régulière » générale Ψ quand $r \to 0$, combinaison linéaire des deux premières solutions j = 1 et 2.

Premier cas. $\varepsilon_T < 0$ ou $V_T(0) = 0$,

$$\Psi_{\text{rég}} \simeq \begin{bmatrix} A\, r^{J} \\ B\, r^{J+2} \end{bmatrix}. \tag{III.3}$$

Tout se passe comme si les équations étaient découplées au point $r = 0$. Alors on peut, comme dans le cas non couplé ([5]), définir une solution régulière par une équation intégrale (matricielle) suivant la méthode des fonctions de Green (le noyau de Green étant indépendant des potentiels nucléaires), le terme libre étant de la forme (III.3). D'autre part, étant donnée la dépendance exponentielle des potentiels nucléaires, le comportement asymptotique en r des solutions de (III.1) est indépendant des potentiels nucléaires comme dans le cas non couplé. On peut donc définir des solutions par des équations intégrales partant non plus de l'origine mais de l'infini et caractérisées par des noyaux de Green et des termes libres indépendants des potentiels nucléaires [exemple (II.18)]. On s'attend donc à ce que dans le cas $V_T(0) = 0$, l'étude des propriétés des solutions couplées, par exemple l'étude des propriétés analytiques par rapport à k [20] ou à J soit semblable à celle des équations non couplées.

Deuxième cas. $0 \leq \varepsilon_T < 2$. Cependant, rien de permet d'affirmer que l'interaction tensorielle est nulle à l'origine. Il semble donc nécessaire d'étudier le cas d'un

([5]) Cf. [12], formule (1. 2).

potentiel tenseur singulier à l'origine. On trouve dans ce cas pour la solution régulière générale

$$(\text{III}.4)\quad \Psi_{\text{rég}} \simeq \begin{bmatrix} A\, r^{J} \\ B\, r^{J+2-\varepsilon_T} \end{bmatrix} \text{ si } \varepsilon_T \neq 0\,, \simeq \begin{bmatrix} A\, r^{J} \\ B(\operatorname{Log} r)\, r^{J+2} \end{bmatrix} \text{ si } \varepsilon_T = 0\,.$$

Donc ici, le comportement à l'origine de la solution régulière générale *dépend explicitement du potentiel tenseur* : $V_T(r)$ n'apparaît donc pas comme une simple perturbation.

B) Comportement asymptotique. — Comme au chapitre II on définit pour la valeur propre (α),

$$\Psi_{(\alpha)}(k, r) = \cos\varepsilon\, \Psi_1(k, r) + \sin\varepsilon\, \Psi_2(k, r)$$

et la solution physique

$$\Psi_{(\alpha)}(-k, r) + \exp(2\,\mathbf{i}\,\delta_\alpha)\,(-1)^J\, \Psi_{(\alpha)}(k, r)\,.$$

C) Conditions de régularité a l'origine. — D'après (III.2) on a

$$(\text{III}.5)\qquad \Psi_i(k, r) = \begin{bmatrix} R_i(k, r) \\ T_i(k, r) \end{bmatrix} \underset{r\to 0}{\simeq} \sum_{j=1}^{4} \begin{bmatrix} r^{\lambda_j}\, \varphi_{i,j}(k, r) \\ r^{\mu_j}\, \psi_{i,j}(k, r) \end{bmatrix}\,,$$

où $\psi_{i,j}(k, 0) = C_j\, \varphi_{i,j}(k, 0)$, $i = 1, 2$. La solution physique devra avoir les deux contributions singulières à l'origine nulles, d'où

$$(\text{III}.6)\quad \begin{aligned} &\cos\varepsilon\, \left[\varphi_{1,j}(-k, 0) + (-1)^J\, \mathbf{e}^{2i\delta_\alpha}\, \varphi_{1,j}(k, 0)\right] + \\ &+ \sin\varepsilon\, \left[\varphi_{2,j}(-k, 0) + (-1)^J\, \mathbf{e}^{2i\delta_\alpha}\, \varphi_{2,j}(k, 0)\right] = 0 \quad (j = 3, 4)\,. \end{aligned}$$

La relation où les $\psi_{i,j}(\pm k, 0)$ remplacent les $\varphi_{i,j}(\pm k, 0)$ étant C_j fois la relation précédente, (III.6) nous donne donc deux relations indépendantes ; le système (III.6) après multiplication par $\exp(-\mathbf{i}\,\delta_\alpha)$ est réel si on remarque que

$$\varphi^*_{i,j}\,(-k^*, 0) = (-1)^J\, \varphi_{i,j}(k, 0).$$

Il permet de déterminer δ_α et le paramètre de couplage ε. L'étude est similaire pour la valeur propre (β).

2. **Détermination des extensions des fonctions de Jost au cas couplé.** — Finalement pour déterminer les solutions physiques correspondant aux valeurs propres (α) et (β) ou les éléments [21] de la matrice

$$S = \begin{bmatrix} S^{J-1}_{J-1} & S^{J-1}_{J+1} \\ S^{J-1}_{J+1} & S^{J+1}_{J+1} \end{bmatrix}\,,$$

il est nécessaire d'obtenir les couples $\begin{bmatrix} \varphi_{i,j}(\pm k, 0) \\ \psi_{i,j}(\pm k, 0) \end{bmatrix}$ $(i = 1, 2\,;\ j = 3, 4)$ qui sont les équivalents dans le cas couplé des fonctions de Jost ; pour chaque couple (j) un seul des deux termes $\varphi_{i,j}(\pm k, 0)$ ou $\psi_{i,j}(\pm k, 0)$ suffit.

Nous allons retrouver, sous une autre forme, la difficulté déjà rencontrée pour la construction d'une solution régulière générale au voisinage de l'origine.

Premier cas. $\varepsilon_T < 0$, $V_T(0) = 0$,

$$\lim_{r\to 0} r^{J-1} R_i(\pm k, r) = \varphi_{i,3}(\pm k, 0)\,, \quad \lim_{r\to 0} r^{J+1} T_i(\pm k, r) = \psi_{i,4}(\pm k, 0)\,.$$

Ici aussi le problème est soluble, on peut éliminer les contributions provenant des solutions singulières [20].

Deuxième cas. $0 \leqq \varepsilon_T < 2$, $V_T(0) \neq 0$,

$$\lim_{r\to 0} r^{J-1+\varepsilon_T} R_i(\pm k, r) \quad \text{ou si} \quad \varepsilon_T = 0, \quad \lim (r^{J-1}/Lr)\, R_i(\pm k, r) = \varphi_{i,4}(\pm k, 0),$$

$$\lim_{r\to 0} r^{J+1} T_i(\pm k, r) = \psi_{i,4}(\pm k, 0)\,.$$

C'est le cas où la solution la plus singulière est plus singulière en u et w. Pour atteindre la solution la moins singulière, il faut extraire de la solution totale tous les termes de la solution la plus singulière plus ou aussi singuliers que $\begin{bmatrix} r^{-(J-1)} \\ r^{-(J-3+\varepsilon_T)} \end{bmatrix}$.

Ceci fait, $\begin{bmatrix} R \\ T \end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix} \overline{R} \\ \overline{T} \end{bmatrix}$ et on peut appliquer le procédé habituel :

$$\lim_{r\to 0} r^{J-1} \overline{R}_i(\pm k, r) = \varphi_{i,3}(\pm k, 0)\,, \qquad \lim_{r\to 0} r^{J-3+\varepsilon_T} \overline{T}_i(\pm k, r) = \psi_{i,3}(\pm k, 0)\,.$$

3. **Système fondamental de solutions pour $r \to 0$ dans le cas où les potentiels non tenseurs sont analytiques** [21] **au voisinage de $r = 0$ (ou ont au plus un pôle du premier ordre** (6]) **ce qui n'entraîne aucune difficulté supplémentaire).** — Nous allons montrer comment obtenir un système fondamental de solutions de (III.1) au voisinage de l'origine pour $\nu = 2 - \varepsilon_T > 0$, sous forme de développement (6] $\sum_{n_0, m_0} r^{n+m\nu} \begin{bmatrix} a_{n,m} \\ b_{n,m} \end{bmatrix}$. Nous déterminerons dans le cas $\nu \leqq 2$ les termes de $\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$ à soustraire pour que les termes les plus singuliers restants soient

$$\begin{bmatrix} r^{-(J-1)} \varphi_3(0) \\ r^{-(J-3+\varepsilon_T)} \psi_3(0) \end{bmatrix}.$$

a) $\nu > 0$ *non entier.* — Nous considérons

$$V^T(r) \underset{r\to 0}{\simeq} \frac{1}{r^{\varepsilon_T}} \sum_{i=0} \begin{bmatrix} V_i^{T_1} & V_i^T \\ V_i^T & V_i^{T_2} \end{bmatrix}$$

et, pour les termes non tenseurs, $V^s \underset{r\to 0}{\simeq} \sum_{i=0} V_i^s r^{i-1}$ (où $s = 1, 2$).

On reporte le développement dans (III.1) ; posons $f(p, J) = p(p-1) - J(J+1)$, on obtient pour les couples (n, m) la relation de récurrence

$$\begin{bmatrix} f(n + m\nu, J - 1) & 0 \\ 0 & f(n + m\nu, J + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,m} \\ b_{n,m} \end{bmatrix} + \sum_{i=0} \left\{ \begin{bmatrix} V_i^{T_1} & V_i^T \\ V_i^T & V_i^{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-i,m-1} \\ b_{n-i,m-1} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} V_i^1 & 0 \\ 0 & V_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-i-1,m} \\ b_{n-i-1,m} \end{bmatrix} \right\} + k^2 \begin{bmatrix} a_{n-2,m} \\ b_{n-2,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(6] Cette méthode a été suggérée par A. Martin (communication privée). Dans [21] nous ne considérions pas explicitement le cas d'un pôle du premier ordre ; les modifications correspondantes sont triviales.

Recherchant les couples (n_0, m_0) minima, on trouve deux cas qui donnent deux groupes de solutions bien distinctes :

1° les solutions j = 2 et 3 de (III.2) : $\begin{bmatrix} J \\ J+\nu \end{bmatrix}_2$ et $\begin{bmatrix} -(J-1) \\ -(J-1)+\nu \end{bmatrix}_3$;

$$C_2 = -V_0^T/f(J+\nu, J+1) \quad \text{et} \quad C_3 = -V_0^T/f[-(J-1)+\nu, J+1],$$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_2 = \sum_{\substack{n_0=J \\ m_0=0}} r^{n+m\nu} \begin{bmatrix} a^{(2)}_{n,m} \\ b^{(2)}_{n,m} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_3 = (\text{Log } r) \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_3 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}_3 = (\text{Log } r) \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_2 + \sum_{\substack{n_0=-(J-1) \\ m_0=0}} r^{n+m\nu} \begin{bmatrix} a^{(3)}_{n,m} \\ b^{(3)}_{n,m} \end{bmatrix};$$

$b^{(2)}_{n_0+p,0} = b^{(3)}_{n_0+p,0} = 0$ (p = 0, 1, 2, ...), $b^{(2)}_{J,0} = b^{(3)}_{-(J-1),0} = a^{(3)}_{J,0} = 0$, $a^{(3)}_{-(J-1),0} \neq 0$ et $a^{(2)}_{J,0} \neq 0$ étant liés par une relation [21] ; la solution 3 ne dépend que d'une constante ;

2° les solutions j = 1 et 4 de (III.2) : $\begin{bmatrix} J+2+\nu \\ J+2 \end{bmatrix}_1$ et $\begin{bmatrix} -(J+1)+\nu \\ -(J+1) \end{bmatrix}_4$,

$$C_1 = -f(J+2+\nu, J-1)/V_0^T \quad \text{et} \quad C_4 = -f[-(J+1)+\nu, J-1]/V_0^T,$$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_1 = \sum_{\substack{n_0=J+2 \\ m_0=0}} r^{n+m\nu} \begin{bmatrix} a^{(1)}_{n,m} \\ b^{(1)}_{n,m} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_4 = (\text{Log } r) \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}_4 = (\text{Log } r) \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_1 + \sum_{\substack{n_0=-(J+1) \\ m_0=0}} r^{n+m\nu} \begin{bmatrix} a^{(4)}_{n,m} \\ b^{(4)}_{n,m} \end{bmatrix},$$

avec $a^{(1)}_{n_0-p,0} = a^{(4)}_{n_0+p,0} = 0$ (p = 0, 1, 2, ...), $b^{(4)}_{J+2,0} = 0$; la solution 4 ne dépend que d'une constante, les coefficients peuvent s'exprimer en fonction de $b^{(4)}_{-(J+1),0} = \lim_{r\to 0} r^{J+1} w(r)$ ou, si $\nu < 2$, de $a^{(4)}_{-(J+1),1} = \lim_{r\to 0} r^{J+1-\nu} u(r) = b_{-(J+1),0}/C_4$.

Termes de $\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$ *à soustraire dans le cas* $\nu < 2$ $[V_T(0) = \infty]$. Si M et N sont des entiers tels que $M \leqq 2/\nu < M+1$, $N \leqq 1/\nu < N+1$, on trouve [21] :

pour u, $\sum_{m=1}^{M} r^{m\nu-(J+1)} a^{(4)}_{-(J+1),m}$ et $\sum_{1}^{N} r^{m\nu-J} a^{(4)}_{-J,m}$;

pour w, $\sum_{0}^{M+1} r^{m\nu-(J+1)} b^{(4)}_{-(J+1),m}$, $\sum_{0}^{N+1} r^{m\nu-J} b^{(4)}_{-J,m}$ et $\sum_{0}^{1} r^{m\nu-(J-1)} b^{(4)}_{-(J-1),m}$.

Remarques. Si $\nu \to 0$, N et $M \to \infty$; si $1 < \nu < 2$, *un seul* terme pour u à retrancher.

b) *Cas de* ν *entier* [21]. — On reporte le développement $\sum_{n_0} r^n \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ dans (III.1),

$$\begin{bmatrix} f(n, J-1) & 0 \\ 0 & f(n, J+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} + \sum_{i=0} \left\{ \begin{bmatrix} V_i^{T_1} & V_i^T \\ V_i^T & V_i^{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-i-\nu} \\ b_{n-i-\nu} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} V_i^1 & 0 \\ 0 & V_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-i-1} \\ b_{n-i-1} \end{bmatrix} \right\} + k^2 \begin{bmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

on retrouve les deux cas précédents :

1° $n_0 = J, -(J-1), a_{n_0} \neq 0, b_{n_0} = 0,$

d'où les développements $\begin{bmatrix} J \\ J+\nu \end{bmatrix}_2$ et $\begin{bmatrix} -(J-1) \\ -(J-1)+\nu \end{bmatrix}_3$;

2° $n_0 = J+2, -(J+1), a_{n_0} = 0, b_{n_0} \neq 0,$

d'où $\begin{bmatrix} J+2+\nu \\ J+2 \end{bmatrix}_1$ et $\begin{bmatrix} (J+1)+\nu \\ -(J+1) \end{bmatrix}_4$.

Mais maintenant les deux groupes de solutions ne sont plus distincts, d'où la nécessité de termes logarithmiques supplémentaires. Si on se limite à $\nu = 2$ ($\nu = 1, 2$) on obtient les solutions

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_1 = \sum_{J+2} r^n \begin{bmatrix} a_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_2 = (\operatorname{Log} r) \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}_2, \text{ où } \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}_2 = \sum_J r^n \begin{bmatrix} a_n^{(2)} \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_3 = (\operatorname{Log} r)^2 \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_1 + (2 \operatorname{Log} r) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}_3,$$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_4 = (\operatorname{Log} r)^3 \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_1 + 3 (\operatorname{Log} r)^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}_2 + 3 (\operatorname{Log} r) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}_3 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}_4,$$

avec sept constantes identiquement nulles, sept constantes différentes de 0 et six relations [21] entre ces constantes, d'où

$\nu = 2, \varepsilon_T = 0,$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_4 \underset{r \to 0}{\simeq} \begin{bmatrix} \dfrac{3 \operatorname{Log} r}{r^{J-1}} \left[a^{(3)}_{-(J-1)} + r \ldots \right] + \dfrac{1}{r^{J-2}} \left[a^{(4)}_{-(J-2)} + \ldots \right] + \ldots \\ \dfrac{3 \operatorname{Log} r}{r^{J-3}} \left[b^{(3)}_{-(J-3)} + r \ldots \right] + \dfrac{1}{r^{J+1}} \left[b^{(4)}_{(J+1)} + r\, b^{(4)}_{J} + r^2 b^{(4)}_{(J-1)} + \right. \\ \left. + r^3 b^{(4)}_{-(J-2)} + r^4 b^{(4)}_{-(J-3)} + \ldots \right] + \ldots \end{bmatrix};$$

$\nu = 1, \varepsilon_T = 1,$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_4 \underset{r \to 0}{\simeq} \begin{bmatrix} \dfrac{3 \operatorname{Log} r}{r^{J-1}} \left[a^{(3)}_{-(J-1)} + r \ldots \right] + \dfrac{1}{r^{J}} \left[a^{(4)}_{-J} + r^2 a^{(4)}_{-(J-2)} + \ldots \right] + \ldots \\ \dfrac{3 \operatorname{Log} r}{r^{J-2}} \left[b^{(3)}_{-(J-2)} + r \ldots \right] + \dfrac{1}{r^{J+1}} \left[b^{(4)}_{-(J+1)} + r\, b^{(4)}_{-J} + r^2 b^{(4)}_{(J-1)} + \right. \\ \left. + r^3 b^{(4)}_{-(J-2)} + \ldots \right] + \ldots \end{bmatrix}.$$

On peut comparer à $\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_3 \underset{r \to 0}{\simeq} \begin{bmatrix} r^{(J-1)} \\ r^{-(J-1)+\nu} \end{bmatrix}$ par exemple pour u ; si $\nu = 2$ il

n'y a qu'un terme à retirer, si $\nu = 1$ il y en a deux. Les coefficients de même écriture, mais de solutions différentes, sont différents.

4. **Conclusion.** — Cette méthode de détermination des coefficients des parties singulières des solutions que nous avons présentée est donc valable pour des potentiels non tenseurs développables ou ayant un pôle du premier ordre (exemple, potentiels de Yukawa). Dans tous ces cas on pourrait en déduire les propriétés d'analyticité de la matrice $\boldsymbol{S}$ car on peut tenir compte de toutes les conditions de régularité à l'origine qui assurent que les fonctions propres sont bien des solutions physiques.

Cependant cette méthode ne s'applique plus si les potentiels non tenseurs sont singuliers et quelconques ($0 < \xi_i < 2$, ξ_i quelconque, différent de 1).

Pour le système proton-proton, dans l'équation (III.1) de départ, il faut inclure le potentiel coulombien supplémentaire, donc un terme qui ne couple pas les états $J - 1$ et $J - 1$. Etant donné le comportement en $1/r$ (quand $r \to \infty$) les états propres entrants ou sortants seront définis par leur comportement asymptotique d'ondes coulombiennes entrantes ou sortantes. Etant donné ce même comportement en $1\ r$ (quand $r \to 0$) le degré des différentes solutions du système fondamental (III.2) reste le même. Si $V_T(0) \neq 0$ on peut développer un formalisme semblable à ce qui a été fait puisque l'on a prévu dans les potentiels non tenseurs la possibilité d'un pôle du premier ordre.

DEUXIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS D'ANALYTICITÉ ASSOCIÉES À LA DIFFUSION PAR UN POTENTIEL DU TYPE DE YUKAWA

IV. Propriétés analytiques de l'amplitude de diffusion de deux particules chargées interagissant par un potentiel du type de Yukawa

Nous présentons une démonstration rigoureuse des propriétés analytiques de l'onde S de diffusion par des potentiels du type superposition d'exponentielles en présence d'une interaction coulombienne. La méthode est basée sur l'étude de la fonction de portée effective. Il est montré que cette fonction est méromorphe dans le plan k à l'exception de deux coupures situées sur l'axe imaginaire. Comme dans le cas non coulombien, la matrice $\boldsymbol{S}_0(k)$ se présente sous la forme du quotient de deux fonctions, l'une avec la coupure dans le demi-plan $\mathrm{Im}\, k > 0$, l'autre avec une coupure dans le demi-plan $\mathrm{Im}\ k < 0$. Les zéros du dénominateur de $\boldsymbol{S}$ dans $\mathrm{Im}\, k > 0$ peuvent encore s'interpréter comme des états liés localisés sur l'axe imaginaire du plan k. La relation entre la discontinuité de $\boldsymbol{S}$ et les approximations de Born successives est étudiée et nous établissons l'équation intégrale reliant la discontinuité de $\boldsymbol{S}$ dans le demi-plan supérieur et $\boldsymbol{S}$ elle-même. Enfin nous donnons quelques éléments d'études sur le comportement asymptotique, le cas d'une interaction coulombienne attractive et le cas de potentiels nucléaires de portée finie.

1. **Introduction.** — La difficulté rencontrée dans la comparaison des résultats de la diffusion proton-proton à basse énergie et de la diffusion neutron-proton est connue depuis lontemps. Elle peut être partiellement surmontée par une modification convenable de l'approximation de la portée effective [22] : mais cela n'est pas suffisant car les paramètres, longueur de diffusion et portée effective, qui entrent dans l'expression relative au cas proton-proton ne sont pas directement comparables à ceux qui apparaissent dans le cas neutron-proton. Une méthode de comparaison consiste à partir d'un modèle de potentiel nucléaire et à résoudre l'équation de Schrödinger avec ou sans potentiel coulombien [23]. Une méthode plus élégante, récemment utilisée par D. Y. Wong et H. P. Noyes [24, 25], est basée sur les propriétés analytiques des amplitudes relatives aux ondes partielles. Ces auteurs ont été guidés par les résultats des études des propriétés analytiques des amplitudes des ondes partielles en l'absence de potentiel coulombien [8, 9, 26]. Dans ce dernier cas, si le potentiel nucléaire est une superposition de potentiels de Yukawa, on peut montrer que les propriétés analytiques, mis à part les états liés possibles et le comportement à l'infini, sont les mêmes que celles obtenues en considérant les termes successifs d'un développement en puissance de l'intensité du potentiel nucléaire. Wong et Noyes ont pris comme point de départ dans leur travail l'hypothèse naturelle qu'il en était de même lorsque la diffusion avait lieu en présence d'un potentiel coulombien supplémentaire. Ce que nous voulons faire ici c'est établir rigoureusement la validité de ces propriétés analytiques sans faire d'hypothèse sur la convergence d'un développement en puissance de l'intensité du potentiel nucléaire.

2. **Expression de la fonction de portée effective à partir d'une solution régulière de l'équation de Schrödinger, définie par son comportement à** $r = 0$. — L'équation de Schrödinger sans potentiel nucléaire s'écrit

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + k^2 - \frac{2\gamma}{r}\right) u = 0\,, \tag{IV.1}$$

où [7] $\gamma = M e^2/2$ dans le cas proton-proton. Une quantité utile sera $\gamma_i = \gamma k$. Nous choisissons deux solutions de (IV.1) définies par leur comportement à l'origine :

$$\begin{cases} u_{\mathrm{R}}, \text{ solution régulière telle que } (\partial u_{\mathrm{R}}/\partial r)_{r=0} = 1\ ; \\ u_{\mathrm{S}}, \text{ solution irrégulière définie par } u_{\mathrm{S}}(0) = 1 \text{ et} \\ \qquad\qquad u_{\mathrm{S}} = \omega(r) + 2\gamma \operatorname{Log}(\lambda r)\, u_{\mathrm{R}} \end{cases} \tag{IV.2}$$

avec, pour des raisons qui apparaîtront plus clairement dans un instant, $\lambda = 2\gamma \exp(2\gamma_0 - 1)$, où $\gamma_0 = 0{,}577\,3$ est la constante d'Euler. La relation entre ces fonctions et celles généralement considérées,

$$\begin{bmatrix} F(r) \\ G(r) \end{bmatrix} \underset{r\to\infty}{\simeq} \begin{bmatrix} \sin(k r - \gamma_i \operatorname{Log}(2 k r) + \sigma_0) \\ \cos(k r - \eta \operatorname{Log}(2 k r) + \sigma_0 \end{bmatrix} \underset{r\to 0}{\simeq} \begin{bmatrix} C k r (1 + \gamma r + \ldots) \\ C^{-1}\ 1 + 2\gamma r \operatorname{Log}(2\gamma r) + \\ \qquad + \ldots + 2\gamma r \left[2\gamma_0 - 1 + h(\eta_i)\right] + \ldots \end{bmatrix}, \tag{IV.3}$$

[7] Dans la suite nous supposons $\gamma > 0$. Une étude symétrique pour $\gamma < 0$ sera faite au paragraphe IV.9.

où

$$\text{(IV.4)} \qquad \sigma_0 = \arg \Gamma(1 + \mathbf{i}\,\eta)\,, \qquad C^2 = 2\,\pi\,\eta\,[\exp(2\,\pi\,\eta) - 1]^{-1}\,,$$
$$h(\eta) = \tfrac{1}{2}\,[\psi(\mathbf{i}\,\eta) + \psi(-\,\mathbf{i}\,\eta) - 2\,\mathrm{Log}\,\eta]\,, \text{ avec } \psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)\,,$$

est la suivante

$$\text{(IV.5)} \quad u_R = F/C\,k\,, \quad u_S = C\,G - [2\,\gamma\,h(\eta)\,F/C\,k]\,, \quad u_S\,u'_R - u_R\,u'_S = 1\,.$$

Nous définissons maintenant la solution régulière de l'équation avec potentiel

$$\text{(IV.6)} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + k^2 - \frac{2\,\gamma}{r}\right) u = V\,u\,,$$

nous imposons

$$\text{(IV.7)} \qquad u(0) = 0\,, \quad u'(0) = 1\,,$$

ce qui est toujours possible si $V(r)$ est moins singulier que $r^{\varepsilon-2}$, $\varepsilon > 0$ à l'origine.

La solution $u(k, r)$ est une fonction entière de k et également une fonction régulière de r dans le domaine du plan complexe où $V(r)$ est prolongeable et moins singulier que $r^{\varepsilon-2}$ avec un point de branchement possible à $r = 0$.

Nous définissons le déphasage nucléaire comme habituellement, c'est-à-dire par

$$u = A\,u_S + B\,u_R \underset{r\to\infty}{\simeq} \mathrm{Cte}\,\sin\,[k\,r + \delta - \eta\,\mathrm{Log}\,(2\,k\,r) + \sigma_0]\,,$$

d'où, compte tenu de (IV.3), (IV.4) et (IV.5),

$$\text{(IV.8)} \qquad k\,C^2\,\mathrm{cotg}\,\delta + 2\,\gamma\,h(\eta) = B(k)/A(k)\,.$$

Pour un potentiel de portée finie, il est facile d'obtenir A et B par combinaison des équations (IV.1) et (IV.6).

$$A = [u'_R\,u - u'\,u_R]_{r=r_0} = -\int_0^{r_0} u\,V\,u_R\,\mathrm{d}r\,,$$

$$B = -[u'_S\,u - u'\,u_S]_{r=r_0} = u'(r_0) + \int_0^{r_0} u\,V\,u_S\,\mathrm{d}r\,,$$

où r_0 est la portée du potentiel.

Les bornes sur u, u_R, u_S, dont nous parlerons au paragraphe suivant, nous permettent en fait, pour un potentiel à décroissance exponentielle de passer [8] à la limite $r_0 \to \infty$. Finalement

$$\text{(IV.9)} \quad k\,C^2\,\mathrm{cotg}\,\delta + 2\,\gamma\,h(\eta) = -\left(1 + \int_0^\infty u\,V\,u_S\,\mathrm{d}r\right) \Big/ \int_0^\infty u\,V\,u_R\,\mathrm{d}r\,.$$

Déjà nous voyons que si l'on néglige provisoirement les difficultés de convergence des intégrales radiales pour $r \to \infty$ le premier membre de (IV.9), que nous appellerons la « fonction de portée effective », est régulier au voisinage de $k = 0$ dans le plan k, parce que u, u_R, et u_S le sont. En fait c'est une fonction paire de k car seul k^2 apparaît dans l'équation de Schrödinger et les conditions aux limites sont indépendantes de k. Ce résultat est évidemment bien connu. Une autre expression fournissant δ_S nous sera utile dans la suite. Elle s'obtient en partant de $u = g(k)\,H^- - f(k)\,H^+$, où $H^\pm = G \pm \mathbf{i}\,F$.

(8) On peut utiliser une démonstration semblable à celle considérée par A. Martin [8] dans le cas non coulombien.

Remarquons qu'entre la solution u de l'équation nucléaire (IV.6) et toute solution u_c de l'équation purement coulombienne (IV.1), par combinaison simple, on trouve une relation ne faisant intervenir explicitement que le potentiel nucléaire :

$$(u' u_c - u_c' u)_r = (u' u_c - u_c' u)_0 + \int_0^r u\, V\, u_c \, \mathrm{d}r \,.$$

Cette relation utilisée pour u_R et u_S conduisait à la fonction de portée effective ; appliquée pour $H^{\pm}$ elle conduit à

$$\text{(IV.10)} \quad S(k) = \mathbf{e}^{2i\delta(k)} = \frac{f(k)}{g(k)} = \frac{u'(0,k) + C(k) \int_0^\infty H^- V\, u \, \mathrm{d}r}{u'(0,k) + C(k) \int_0^\infty H^+ V\, u \, \mathrm{d}r} \,.$$

Cette équation est l'analogue coulombien de celle donnée par A. Martin ([8] équations 20 et 21).

3. **Analyticité de la fonction de portée effective.** — Nous voulons trouver le domaine de régularité des fonctions

$$\text{(IV.11)} \quad A(k) = -\int_0^\infty u\, V\, u_R \, \mathrm{d}r \,, \qquad B(k) = 1 + \int_0^\infty u\, V\, u_S \, \mathrm{d}r$$

pour des potentiels de la forme

$$\text{(IV.12)} \qquad V(r) = \int_\mu^\infty \mathbf{e}^{-\alpha r}\, C(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha \,, \quad |\, C(\alpha)\,| < \mathrm{Cte}\, \alpha^{1-\varepsilon}$$

(donc moins singuliers que r^{-2} à l'origine).

Regge [4, 11, 12] a remarqué que les potentiels du type (IV.12) étaient prolongeables analytiquement en r pour des valeurs de r telles que $\mathrm{Re}\, r > 0$. Plus précisément si $r = \rho \exp(\mathbf{i}\,\sigma)$, $|\, V(r)\,| \exp\big[(\mu - \varepsilon)\, \rho \cos\sigma\big] \to 0$ si $|r| \to \infty$ dans la direction σ. Nous allons donc chercher à borner u, u_R et u_S pour des valeurs complexes de k le long d'un rayon $r = \rho \exp(\mathbf{i}\,\sigma)$.

1. Bornes pour les solutions coulombiennes et nucléaires. — L'équation de Schrödinger pour r complexe le long d'un rayon ρ devient

$$\text{(IV.13)} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + q^2 - \frac{2\,\Gamma}{\rho}\right) v(\rho, q, \sigma) = W(\rho, \sigma)\, v(\rho, q, \sigma) \,,$$

où

$$\Gamma = \gamma \exp(\mathbf{i}\,\sigma), \; q = k \exp(\mathbf{i}\,\sigma), \; W(\rho, \sigma) = \exp(2\,\mathbf{i}\,\sigma)\, V\big[\rho \exp(\mathbf{i}\,\sigma)\big] \,.$$

On voit immédiatement que par un choix judicieux de σ on peut réduire la croissance exponentielle des solutions lorsque k est complexe. On fait choix des solutions suivantes :

$$\text{(IV.14)} \quad \left.\begin{array}{ll} v(\rho, q, \sigma) = u(r, k) \exp(-\mathbf{i}\,\sigma) \,, & (\mathrm{d}v/\mathrm{d}\rho)_{\rho=0} = 1 \\ v_R(\rho, q, \sigma) = u_R(r, k) \exp(-\mathbf{i}\,\sigma) \,, & (\mathrm{d}v_R/\mathrm{d}\rho)_{\rho=0} = 1 \\ v_S(\rho, q, \sigma) = u_S(r, k) & \end{array}\right\} \text{pour } W = 0 \,.$$

Nous étudions les solutions régulières de (IV.13) soit v et v_R ($W = 0$). Les conditions initiales (IV.14) déterminent le terme libre des équations intégrales

$$\text{(IV.15)}\quad v(\rho) = \frac{\sin q\,\rho}{q} + \int_0^{\rho} \frac{\sin q\,(\rho - \rho')}{q} \left[\frac{2\,\Gamma}{\rho'} + W(\rho')\right] v(\rho')\,d\rho' .$$

On en déduit [30] :

a) les bornes de v_R solution régulière coulombienne

$$\text{(IV.16)}\qquad |v_R| < \rho \exp\left[|\operatorname{Im} q|\,\rho + 2\sqrt{|2\,\gamma|\,\rho}\right],$$

$$\text{(IV.17)}\qquad |v_R| < \exp\left(|\operatorname{Im} q|\,\rho\right)\left[1 + |2\,\gamma|\,\rho\,\exp(2\sqrt{2\,|\gamma|\,\rho})\right]/|q| ;$$

b) les bornes de v [30] sont simples si $W(\rho, \sigma)$ peut être borné par Cte ρ^{-1} dans $-(\pi/2) + \varepsilon < \sigma < (\pi/2) - \varepsilon$; c'est le cas si $C(\alpha) <$ Cte ; alors les bornes de v se déduisent simplement de celles de v_R en remplaçant γ par une autre constante, sinon on doit distinguer deux régions, l'une $(\rho < \rho_0)$ $|W| <$ Cte $\rho^{-2+\varepsilon}$, l'autre où $|W| <$ Cte ρ^{-1} $(\rho > \rho_0)$. On obtient alors

$$\text{(IV.18)}\quad |v| < C_1 \exp(|\operatorname{Im} q|\,\rho) \exp\left[2\sqrt{2\,(|\gamma| + |\gamma_N|)\,\rho}\right],$$

$$\text{(IV.19)}\quad |v| < \exp\left(|\operatorname{Im} q|\,\rho\right)\left[1 + (C_2 + C_3\,\rho)\,\exp\left[2\sqrt{2(|\gamma| + |\gamma_N|)\,\rho}\right]\right]/|q|,$$

où C_1, C_2, C_3 et γ_N sontdes constantes indépendantes de k et où $-(\pi/2) + \varepsilon < \sigma < (\pi/2) - \varepsilon$;

c) les bornes de v_S [30] sont

$$\text{(IV.20)}\quad |v_S| < \mathbf{e}^{|\operatorname{Im} q|\rho}\left[4 + \mathbf{e}^{2\sqrt{2}\sqrt{|\gamma|\rho}}(a + b\,\rho + c\,\operatorname{Log}\rho) + d\,\rho^2\,\mathbf{e}^{4\sqrt{2}\sqrt{|\gamma|\rho}}\right],$$

où les constantes a, b, c et d sont indépendantes de k.

2. Domaines d'analyticité de $A(k)$ et $B(k)$. — A l'aide des bornes (IV.16 à 20), on montre, en premier lieu, en prenant $\sigma = 0$, que les expressions $A(k)$ et $B(k)$ définies par (IV.11) ont un sens dans la bande $-\mu/2 < \operatorname{Im} k < \mu/2$ comme prévu. Pour prolonger ces expressions hors de cette bande nous définissons

$$\text{(IV.21)}\qquad \begin{aligned} A(\sigma, k) &= -\int_{\rho=0}^{\rho=\infty} u(r, k)\; V(r)\; u_R(r, k)\exp(\mathbf{i}\,\sigma)\,d\rho , \\ B(\sigma, k) &= 1 + \int_{\rho=0}^{\rho=\infty} u(r, k)\; V(r)\; u_S(r, k)\exp(\mathbf{i}\,\sigma)\,d\rho ; \end{aligned}$$

les fonctions u, u_R, u_S étant liées à v, v_R, v_S par (IV.14), on voit que, si on utilise pour ces dernières les diverses bornes indiquées alors $A(\sigma, k)$ et $B(\sigma, k)$ sont réguliers en k dans une bande $|\operatorname{Im}\left[k\exp(\mathbf{i}\,\sigma)\right]| < (\mu/2)\cos\sigma$. La figure 1 montre le domaine de régularité de $A(k) = A(0, k)$ et $B(k) = B(0, k)$ et le domaine de régularité de $A(\sigma, k)$ et $B(\sigma, k)$.

Il s'agit maintenant de montrer que $A(\sigma, k)$ par exemple et $A(0, k)$ sont deux expressions d'une seule et même fonction analytique. Considérons un point k_0 appartenant au domaine commun D_σ de régularité de $A(\sigma, k)$ et $A(0, k)$. La différence $A(0, k_0) - A(\sigma, k_0)$ est simplement la limite (fig. 2) pour $R \to \infty$ de $\int_{M_0}^{M_\sigma} u(r, k_0)\; V(r)\; u_R(r, k_0)\,dr$, la contribution de l'arc de circonférence contournant l'origine étant négligeable, même si l'origine est un point de branchement.

Cherchons le domaine Δ_σ tel que pour tout k appartenant à Δ_σ on ait $\int_{M_0}^{M_\sigma} u(r, k)\; V(r)\; u_R(r, k)\,dr \equiv 0$. Comme $0 \leqq \sigma' = \arg r \leqq \sigma$, dans une direction σ'

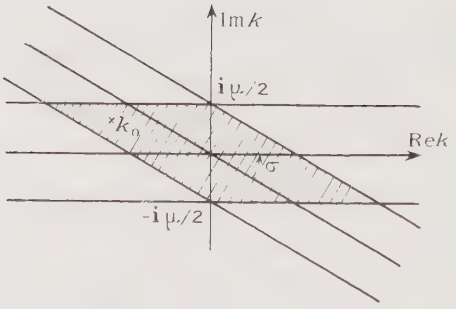

FIG. 1. — Cas $\sigma > 0$.

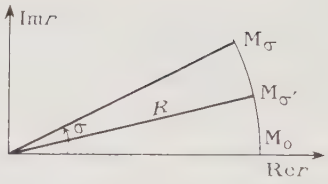

FIG. 2.

intermédiaire entre 0 et σ, $u(r, k)\ V(r)\ u_R(r, k)$ décroît exponentiellement si k appartient à $D_{\sigma'}$, $D_{\sigma'}$ étant le domaine tel que $|\operatorname{Im}[k \exp(\mathbf{i}\,\sigma')]| < (\mu/2)\cos\sigma'$; Δ_σ est donc l'intersection des domaines $D_{\sigma'}$ et cette intersection commune est justement D_σ, intersection de $A(\sigma, k)$ et de $A(0, k)$. Donc $\Delta_\sigma = D_\sigma$. La différence $A(\sigma, k) - A(0, k)$ est nulle pour tout k_0 considéré et $A(\sigma, k)$ constitue le prolongement de $A(k)$ dans la bande σ. En faisant varier σ de $-(\pi/2) + \varepsilon$ à $(\pi/2) - \varepsilon$ on engendre tout le plan complexe k sauf les coupures $k = \pm\,\mathbf{i}\,\mu/2 \to \pm\,\mathbf{i}\,\infty$. Le même raisonnement vaut pour $B(k)$.

$A(k)$ et $B(k)$ sont donc prolongeables dans tout le plan k avec des coupures le long de l'axe imaginaire ayant respectivement comme points de départ $k = \mathbf{i}\,\mu/2$ et $k = -\,\mathbf{i}\,\mu/2$.

4. **Représentations intégrales.** — Les bornes (IV.17, 19 et 20) montrent que dans une direction donnée autre que l'axe imaginaire on a, si le potentiel est moins singulier que $1/r$ à l'origine,

$$\text{(IV.22)} \quad A(k) \simeq O(1/|k|^2), \qquad B(k) - 1 \simeq O(1/|k|) \quad \text{pour} \quad |k| \to \infty .$$

Si le potentiel est plus singulier que $1/r$ on doit évidemment utiliser à la fois (IV.16 à 19). Dans ce cas, si $V(r) \simeq r^{\varepsilon-2}$ pour $r \to 0$ on peut montrer que

$$\text{(IV.23)} \quad A(k) \simeq O\left[(1/|k|)^{1+\varepsilon-\varepsilon'}\right], \quad B(k) - 1 \simeq O\left[(1/|k|)^{\varepsilon-\varepsilon'}\right] \quad \text{pour} \quad |k| \to \infty ,$$

où ε' est arbitrairement petit.

Ces conditions sont suffisantes pour permettre de représenter $A(k)$ et $B(k)$ par des intégrales de Cauchy dans le plan complexe de k qui se réduisent à des intégrales le long des deux coupures. Compte tenu des symétries $A(k) = A(-k)$, $A^*(k^*) = A(k)$ et des symétries analogues pour B on peut finalement écrire

$$\text{(IV.24)} \quad A(k) = -\int_{\mu/2}^{\infty} \frac{W_1(\varkappa)}{k^2 + \varkappa^2}\, d\varkappa , \qquad B(k) = 1 + \int_{\mu/2}^{\infty} \frac{\varkappa\, W_2(\varkappa)}{k^2 + \varkappa^2}\, d\varkappa .$$

Il faut noter qu'en général, bien que $\int [\varkappa\, W_2/(\varkappa^2 + k^2)]\, d\varkappa$ converge, $\int \varkappa\, W_2\, d\varkappa$ ne converge pas. Car même dans la situation la plus favorable (IV.22), $B(k)$ se comporte en k^{-1} à l'infini. $\int W_1(\varkappa)\, d\varkappa$ ne converge que si le potentiel est moins singulier que $1/r$ à l'origine. Nous écrirons finalement

$$k\,C^2 \operatorname{cotg}\delta + 2\gamma\,h(\eta) = \frac{1 + \int_{\mu/2}^{\infty} \left[\varkappa\, W_2(\varkappa)/(\varkappa^2 + k^2)\right] \mathrm{d}\varkappa}{-\int_{\mu/2}^{\infty} \left[W_1(\varkappa)/(\varkappa^2 + k^2)\right] \mathrm{d}\varkappa}\,. \tag{IV.25}$$

5. **Relation entre les fonctions de poids W_1 et W_2.** — On sait que dans le cas non coulombien on peut donner une représentation intégrale de l'amplitude de diffusion contenant une fonction de poids unique [27, 26, 10]. Il doit être possible d'en faire autant dans le cas coulombien et de relier entre elles les deux fonctions de poids W_1 et W_2 introduites au paragraphe précédent. Nous pouvons à cet effet utiliser une fois de plus l'analogie avec le cas non coulombien. Dans le cas non coulombien nous savons que

$$I(k) = \int_0^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\,k\,r)\; V(r)\; u(r)\; \mathrm{d}r$$

est régulier dans tout le demi-plan complexe inférieur. Or dans ce cas $\exp(-\mathrm{i}\,k\,r) = u_S - \mathrm{i}\,k\,u_R$, d'où

$$I(k) = \int_{\mu/2}^{\infty} \frac{\varkappa\, W_2(\varkappa)_{nc}}{k^2 + \varkappa^2}\,\mathrm{d}\varkappa - \mathrm{i}\,k \int_{\mu/2}^{\infty} \frac{W_1(\varkappa)_{nc}\,\mathrm{d}\varkappa}{k^2 + \varkappa^2}\,.$$

La discontinuité de $I(k)$ le long du demi-axe imaginaire négatif est nulle ; donc $W_1(\varkappa)_{nc} = W_2(\varkappa)_{nc}$.

Remarquons que tout ceci exprime une propriété bien connue dans le cas non coulombien : la fonction de Jost, égale ici à $I(k) + 1$ est régulière dans $\mathrm{Im}\,k < 0$ donc nécessairement $W_1(\varkappa)$ et $W_2(\varkappa)$ sont liés de façon à conserver cette propriété.

Revenons au cas coulombien ; nous allons considérer l'intégrale

$$I(k) = C(k) \int_0^{\infty} H^-(k, r)\; V(r)\; u(r)\; \mathrm{d}r\,, \tag{IV.26}$$

où

$$C\,H^{\mp} = C\,(G \mp \mathrm{i}\,F) = u_S + \left[2\gamma\,h(\eta) \mp \mathrm{i}\,k\,C^2(k)\right] u_R\,. \tag{IV.27}$$

Il est commode de définir

$$f(k) = 2\gamma\,h(\eta) - \mathrm{i}\,k\,C^2(k)\,. \tag{IV.28}$$

Utilisant (IV.27) et (IV.28) et, d'autre part, les représentations intégrales indiquées au paragraphe précédent, $I(k)$ défini par (IV.26) s'écrit sous la forme

$$C \int H^-\,V\,u\,\mathrm{d}r = \int_{\mu/2}^{\infty} \frac{\varkappa\, W_2(\varkappa)}{k^2 + \varkappa^2}\,\mathrm{d}\varkappa + f(k) \int_{\mu/2}^{\infty} \frac{W_1(\varkappa)}{k^2 + \varkappa^2}\,\mathrm{d}\varkappa\,. \tag{IV.29}$$

Nous allons donc étudier les deux membres de (IV.29) et montrer qu'une propriété équivalente à celle existant dans le cas non coulombien, permet dans le cas coulombien de relier les deux fonctions de poids.

1. Propriétés [30] *de la fonction* $f(k) = 2\gamma\,h(\eta) - \mathrm{i}\,k\,C^2(k)$. — A ce point, il est utile de faire un *choix* de la coupure d'origine coulombienne partant de la singularité essentielle à $k = 0$; nous choisirons le demi-axe k réel négatif.

$$f(k) = -4\gamma \int_0^{\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2 - \eta^2 + \mathrm{i}\,\varepsilon)\left[\exp(2\pi\,t) - 1\right]}\,. \tag{IV.30}$$

On va étudier $f(k)$ sur le demi-axe imaginaire négatif $k = -\mathbf{i}\,\varkappa$, où $\varkappa > 0$

$$(\text{IV}.31) \qquad f(-\mathbf{i}\,\varkappa) = -4\,\gamma \int_0^\infty \frac{t\,dt}{\left[t^2 + (\gamma^2/\varkappa^2)\right]\left[\exp(2\,\pi\,t) - 1\right]}\,.$$

$f(-\mathbf{i}\,\varkappa)$ est réelle, toujours négative, sans pôles quelle que soit la valeur de γ.

En appliquant la formule de Binet à la représentation (IV.31) de $f(-\mathbf{i}\,\varkappa)$ on obtient

$$f(-\mathbf{i}\,\varkappa) = 2\,\gamma\left[\psi\left(\frac{\gamma}{\varkappa}\right) - \mathrm{Log}\left(\frac{\gamma}{\varkappa}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa}{\gamma}\right].$$

D'où [28] une nouvelle expression de $f(-\mathbf{i}\,\varkappa)$

$$(\text{IV}.32) \quad f(-\mathbf{i}\,\varkappa) = -2\,\gamma\,\gamma_0 - \varkappa + \frac{2\,\gamma^2}{\varkappa}\sum_1^\infty \frac{1}{n\left[n + (\gamma/\varkappa)\right]} - 2\,\gamma\,\mathrm{Log}\left(\frac{\gamma}{\varkappa}\right).$$

En prolongeant (IV.32) pour $\varkappa < 0$ on voit que $f(k)$ sur le demi-axe imaginaire positif est complexe et a des pôles pour $k = \mathbf{i}\,\gamma/n$ où $n = 1, 2, \ldots$ Donc $f(k)$ est régulière dans la réunion de $\mathrm{Im}\,k < 0$ et $\mathrm{Re}\,k > 0$ et réelle pour $\mathrm{Re}\,k = 0$, $\mathrm{Im}\,k < 0$.

2. Borne [30] *pour* $H_0^-(k, r)$ *avec* $\mathrm{Im}\,k < 0$, $\gamma > 0$ *et* $r > r_0$ (r_0 fini), $|k| > \varepsilon$. — Nous allons utiliser la représentation donnée [29] pour k réel :

$$(\text{IV}.33) \qquad C(k)\,H_0^-(k, r) = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}kr}\int_0^\infty t^{-\mathbf{i}\eta}\,(t + 2\,\mathbf{i}\,k\,r)^{\mathbf{i}\eta}\,\mathbf{e}^{-t}\,dt\,.$$

De (IV.33) on tire

$$(\text{IV}.34) \quad |C(k)\,H_0^-(k, r)| < \mathbf{e}^{\mathrm{Im}kr}\,r^{\gamma\,\mathrm{Im}k/|k|^2} \times \text{constante indépendante de } k\,.$$

3. Expression intégrale de la fonction de portée effective. — On voit alors aisément, partant de (IV.26) et (IV.34), que l'intégrale $I(k)$ ne présente aucune singularité dans le demi-plan $\mathrm{Im}\,k < 0$. En particulier sa discontinuité le long de l'axe imaginaire négatif doit être nulle. Par conséquent,

$$(\text{IV}.35) \qquad \varkappa\,W_2(\varkappa) + f(-\mathbf{i}\,\varkappa)\,W_1(\varkappa) = 0\,,$$

ce qui fournit la relation cherchée. On peut voir que pour les grandes valeurs de $\varkappa$, $f(-\mathbf{i}\,\varkappa)$ est équivalent à $-\varkappa$, donc que $W_1/W_2 \to 1$. La représentation intégrale (IV.25) devient

$$(\text{IV}.36) \quad k\,C^2(k)\,\mathrm{cotg}\,\delta + 2\,\gamma\,h(\eta) = \frac{1 - \displaystyle\int_{\mu/2}^\infty \left[f(-\mathbf{i}\,\varkappa)\,W_1(\varkappa)/(k^2 + \varkappa^2)\right]d\varkappa}{-\displaystyle\int_{\mu/2}^\infty \left[W_1(\varkappa)/(k^2 + \varkappa^2)\right]d\varkappa}\,.$$

On vérifie aisément l'accord avec les résultats connus dans le cas non coulombien en remplaçant $f(-\mathbf{i}\,\varkappa)$ par $-\varkappa$.

6. **Expression de la fonction $S(K)$ et relation entre la discontinuité et la fonction de poids.** — Il n'est pas difficile de tirer $S(k) = \exp\left[2\,\mathbf{i}\,\delta(k)\right]$ de l'équation (IV.36). On obtient alors

$$(IV.37) \qquad S(k) = \frac{1 + \int_{\mu/2}^{\infty} \left[W_1(\varkappa)/(k^2 + \varkappa^2)\right] \left[f(k) - f(-\mathbf{i}\,\varkappa)\right] d\varkappa}{1 + \int_{\mu/2}^{\infty} \left[W_1(\varkappa)/(k^2 + \varkappa^2)\right] \left[f^*(k^*) - f(-\mathbf{i}\,\varkappa)\right] d\varkappa} .$$

Sous cette forme l'unitarité de S, $S(k)\,S^*(k^*) = 1$, est manifeste.

Le choix de la coupure coulombienne étant pris le long de l'axe réel négatif, on voit que les singularités de $S(k)$ sont :

1° la coupure coulombienne partant de $k = 0$, singularité essentielle ;

2° les pôles de $f(k)$ sur l'axe imaginaire positif à $k = \mathbf{i}\,\gamma/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

3° une coupure de $k = \mathbf{i}\,\mu/2$ à $k = \mathbf{i}\,\infty$ provenant exclusivement du *numérateur* de $S(k)$;

4° de même une coupure de $k = -\mathbf{i}\,\mu/2$ à $k = -\mathbf{i}\,\infty$ provenant exclusivement du *dénominateur* de $S(k)$;

5° les zéros isolés du dénominateur. Nous voudrions montrer que le dénominateur, qui est complètement régulier dans le demi-plan $\mathrm{Im}\,k > 0$ ne peut avoir de zéros dans $\mathrm{Im}\,k > 0$ que sur l'axe imaginaire et que ces zéros correspondent aux états liés possibles, comme dans le cas non coulombien.

Il n'est pas difficile de voir que le dénominateur de (IV.37), en utilisant (IV.27), n'est autre que

$$1 + C(k) \int_0^{\infty} H^+ V\, u\, dr \qquad \left[u'(0) = 1\right],$$

c'est-à-dire que le numérateur et le dénominateur de (IV.37) coïncident avec le numérateur et le dénominateur de (IV.10). Supposons que

$$(IV.38) \qquad \mathcal{F}^+(k) = 1 + C(k) \int_0^{\infty} H^+ V\, u\, dr = 0 .$$

A partir de là, la démonstration est aisée si le potentiel a une portée finie, mais plus délicate si la décroissance du potentiel est exponentielle, ce qui est le cas ici.

On peut alors montrer [30] que (IV.38) permet d'établir la décroissance exponentielle de $u(r)$ pour $r \to \infty$; $u(r, k)$ est donc la fonction d'onde d'un état lié.

Nous voulons établir ce résultat d'une autre façon et montrer la connexion entre le formalisme que nous avons utilisé pour la diffusion coulombienne et le formalisme habituel des fonctions de Jost que nous avons constamment utilisé dans l'étude du cas non coulombien (chap. I, II, III et VI).

La fonction $u(r)$ précédemment utilisée telle que $u'(0) = 1$ satisfait l'équation

$$(IV.39) \quad u(r, k) = \frac{F(r)}{k\,C(k)} + \frac{1}{k} \int_0^r \left[F(r)\,H^+(r') - H^+(r)\,F(r')\right] V(r')\,u(r')\,dr' ;$$

après quelques modifications (IV.39) s'écrit

$$u(r, k) = \frac{\mathcal{F}^-(k)\,H^+(r) - \mathcal{F}^+(k)\,H^-(r)}{2\,\mathbf{i}\,k\,C(k)} +$$

$$+ \frac{1}{k} \int_r^{\infty} \left[H^-(r)\,H^+(r') - H^+(r)\,H^-(r')\right] V(r')\,u(r')\,dr' ,$$

où

$$\mathcal{F}^{\pm}(k) = 1 + C(k) \int_0^{\infty} H^{\pm}\, V\, u\, \mathrm{d}r \; ; \tag{IV.40}$$

l'équation intégrale étant linéaire, nous pouvons définir deux fonctions $f^{=}(r, k)$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1^{\circ} & f^{\pm}(r, k) \quad \text{sont des solutions de (IV.6)}, \\ 2^{\circ} & f^{\pm}(r, k) \underset{r\to\infty}{\simeq} H^{\pm}(r, k)\,, \\ 3^{\circ} & u(r, k) = \dfrac{\mathcal{F}^{-}(k)\, f^{+}(k, r) - \mathcal{F}^{+}(k)\, f^{-}(k, r)}{2\,\mathbf{i}\,k\,C(k)}\,. \end{array} \right. \tag{IV.41}$$

(IV.41) nous ramène à la définition habituelle de la matrice S en théorie du potentiel, qui fait intervenir le rapport des contributions de deux solutions qui, asymptotiquement, se comportent comme des ondes purement entrantes et sortantes. Remarquons que nous n'avons plus la symétrie non coulombienne des fonctions de Jost $\mathcal{F}^{-}(k) = \mathcal{F}^{+}(-k)$, mais $\mathcal{F}^{-}(+k) = (\mathcal{F}^{+}(k^*))^*$. Pour k complexe nous considérons le prolongement analytique de (IV.40) et (IV.41). L'identification considérée pour k réel (avec le même choix de la coupure coulombienne) assure l'unicité du prolongement analytique.

Nous allons donc étudier un pôle de S, zéro de $\mathcal{F}^{-}(k)$ dans $\mathrm{Im}\, k > 0$ de la même façon que nous l'étudions (chap. VI) dans le cas non coulombien ; alors

$$u(r, k) = \mathcal{F}^{-}(k)\, f^{+}(k, r)/2\,\mathbf{i}\,k\,C(k)\,.$$

Nous voulons d'abord montrer que $f^{-}(k, r) \underset{r\to\infty}{\to} 0$ ou que $C(k)\, H^{-}(k, r) \underset{r\to\infty}{\to} 0$ d'après (IV.41). Pour cela nous voulons obtenir une borne pour $H_0^{-}(k, r)$, avec $\mathrm{Im}\, k > 0$ ($r > r_0$ fini, $|k| > \varepsilon$). On utilise (IV.34) pour $C(k^*)\, H_0^{-}(k^*, r)$ avec $\mathrm{Im}\, k^* < 0$. Comme, d'après (IV.27), $C(k)\, H_0^{+}(k, r) = [C(k^*)\, H_0^{-}(k^*, r)]^*$ on a

$$|C(k)\, H_0^{\pm}(k, r)| < \exp(-\mathrm{Im}\, k\, r)\, r^{-\gamma\, \mathrm{Im}\, k/|k|^2} \times \text{constante indépendante de } k\,. \tag{IV.42}$$

D'après cette borne et la relation liant u et $f^{-}(k, r)$ on voit que $u(r)$ s'annule quand $r \to 0$ et $r \to \infty$. Alors par la combinaison habituelle de l'équation de Schrödinger pour u avec l'équation imaginaire conjuguée $(k^2 - k^{2*}) \int_0^{\infty} u^2\, \mathrm{d}r = 0$, ce qui pour $\mathrm{Im}\, k > 0$ implique $\mathrm{Re}\, k = 0$ (c.q.f.d.).

Nous voulons maintenant donner la relation entre W et la discontinuité de $S(k)$ sur la coupure supérieure exprimée par

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [S(\mathbf{i}\,\varkappa + \varepsilon) - S(\mathbf{i}\,\varkappa - \varepsilon)]/2\,\mathbf{i}\,\pi = \Delta(\varkappa) \qquad (\varkappa > \mu/2)\,.$$

Il suffit de partir de l'équation (IV.37) et de remarquer que le dénominateur est une fonction régulière : on obtient alors, compte tenu de l'expression de $f(k)$,

$$C^2(\mathbf{i}\,\varkappa_0)\, W_1(\varkappa_0) = \Delta(\varkappa_0) \left[-1 - \int_{\mu/2}^{\infty} \frac{W_1(\varkappa)}{\varkappa + \varkappa_0}\, \frac{f(-\mathbf{i}\,\varkappa) - f(-\mathbf{i}\,\varkappa_0)}{\varkappa - \varkappa_0}\, \mathrm{d}\varkappa \right]\,,$$

où

$$\left(\sin\frac{\pi\,\gamma}{\varkappa_0}\right)^{-1} \frac{\pi\,\gamma}{\varkappa_0} \exp\left(\frac{\mathbf{i}\,\pi\,\gamma}{\varkappa_0}\right) = C^2(\mathbf{i}\,\varkappa_0)\,;$$

cette équation appelle plusieurs commentaires.

En premier lieu on voit que si $\gamma = 0$, $f(-\mathbf{i}\,\varkappa) = -\varkappa$; cette équation coïncide avec celle donnée par A. Martin [10] dans le cas non coulombien. En second lieu, nous voyons que W_1 et $f(-\mathbf{i}\,\varkappa)$ étant des quantités réelles, la discontinuité de $S(k)$ est complexe et soumise à une contrainte, à savoir $\arg \Delta(\varkappa_0) = (\pi\gamma/\varkappa_0) - n\pi$.

Si cette contrainte, due aux effets coulombiens, est satisfaite, l'équation (IV.43) peut se ramener à une équation intégrale réelle [24] permettant d'obtenir la fonction de poids $W_1(\varkappa)$, donc la matrice $S(k)$ et la fonction de portée effective à partir de la discontinuité

(IV.44)

$$\frac{\pi\gamma}{\varkappa_0}\left(\sin\frac{\pi\gamma}{\varkappa_0}\right)^{-1} W_1(\varkappa_0) = D(\varkappa_0)\left[1 + \int_{\mu/2}^{\infty} \frac{W_1(\varkappa)}{\varkappa^2 - \varkappa_0^2}\left[f(-\mathbf{i}\,\varkappa) - f(-\mathbf{i}\,\varkappa_0)\right] d\varkappa\right],$$

où $D(\varkappa_0) = \Delta(\varkappa_0)\exp(-\mathbf{i}\,\pi\gamma/\varkappa_0)$. Il faut noter qu'à partir de la formule (IV.30) on peut montrer que $0 < [f(-\mathbf{i}\,\varkappa_0) - f(-\mathbf{i}\,\varkappa)]/(\varkappa - \varkappa_0) < 1$. De là il est facile de montrer qu'une condition simple suffisante pour l'existence d'une solution (solution développable en série d'ailleurs) de l'équation (IV.44) est

$$\int_{\mu/2}^{\infty} \frac{|D(\varkappa)|}{\varkappa + (\mu/2)}\, d\varkappa < 1 .$$

On pourrait obtenir une condition plus faible en suivant les mêmes lignes de démonstration que de Alfaro & Regge [43].

7. **Relation entre la discontinuité et les discontinuités des approximations de Born successives.** — On sait, dans le cas non coulombien, que la discontinuité de $S(k)$ sur la coupure $k = \mathbf{i}\,\mu/2 \to \mathbf{i}\,\infty$ est donnée exactement par la somme des discontinuités des n premiers termes du développement de $S(k)$ en puissances du potentiel dans la région $k = \mathbf{i}\,\mu/2 \to k = \mathbf{i}\,(n+1)\,\mu/2$ et cela même si la série complète n'est pas convergente. Nous voulons établir le même résultat ici. Nous définissons la fonction d'onde $\bar{u}(r, k)$ par

$$\text{(IV.45)} \qquad \bar{u}(r) = F(r) - \frac{1}{k}\int_0^{\infty} H^+(r_>)\, F(r_<)\, V(r')\, \bar{u}(r')\, dr' .$$

L'amplitude de diffusion est alors définie par le comportement asymptotique de $\bar{u}(r)$ et l'on trouve

$$\text{(IV.46)} \qquad \exp(\mathbf{i}\,\delta)\sin\delta = -\frac{1}{k}\int_0^{\infty} F(r)\, V(r)\, \bar{u}(r)\, dr .$$

D'autre part, la fonction $u(r)$ telle que $u'(0) = 1$ vérifie (IV.39) ; la comparaison de (IV.39) et (IV.45) donne la relation entre u et $\bar{u}$

$$\text{(IV.47)} \qquad \bar{u}(r, k) = [k\, C(k)\, u(r, k)]/\mathcal{F}^+(k) .$$

Dès lors nous voyons que si dans $\mathrm{Im}\, k > 0$ nous excluons le voisinage des états liés qui, nous l'avons vu, correspondent aux zéros de $\mathcal{F}^+(k)$ et le voisinage des pôles de $C(k)$, nous pouvons utiliser pour u les bornes (IV.18 et 19).

Montrons maintenant le principe de la démonstration en calculant la discontinuité entre $k = \mathbf{i}\,\mu/2$ et $k = \mathbf{i}\,\mu$. On peut, en itérant une fois (IV.45), remplacer (IV.46) par une autre expression exacte

(IV.48)

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\delta} \sin\delta = -\frac{1}{k}\int_0^\infty F\,V\,F\,\mathrm{d}r + \frac{1}{k^2}\int F(r)\,V(r)\,H^+(r>)\,F(r<)\,V(r')\,\bar{u}(r')\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}r\,.$$

Le premier terme représente l'approximation de Born. Nous pouvons montrer [30] que le second terme est régulier dans une bande $0 < \mathrm{Im}\,k < \mu$. La discontinuité entre $k = \mathbf{i}\,\mu/2$ et $k = \mathbf{i}\,\mu$ est donc donnée par la discontinuité du prolongement analytique de la première approximation de Born $-(1/k)\int F\,V\,F\,\mathrm{d}r$.

Le même raisonnement peut être étendu à la discontinuité dans le segment $k = \mathbf{i}\,\mathrm{n}\,\mu/2$, $k = \mathbf{i}\,(\mathrm{n}+1)\,\mu/2$; il suffit de partir de l'expression n fois itérée de $\exp(\mathbf{i}\,\delta)\sin\delta$ et de tenir compte de la décroissance exponentielle de H^+. Il est clair qu'à aucun moment on n'a supposé la convergence de la série de Born.

8. **Comportement à haute énergie et implications sur la fonction de poids W_1.** — Dans le cas simple, malheureusement peu réaliste, où le potentiel est moins singulier que $1/r$ à l'origine, les relations (IV.22 et 23) nous montrent que tg δ, donc δ, se comporte comme k^{-1} à haute énergie. Plus précisément, $k \to \infty$.

$$\mathrm{tg}\,\delta \simeq \delta \simeq \frac{1}{k}\int_{\mu/2}^\infty W_1(\varkappa)\,\mathrm{d}\varkappa\,.$$

Intuitivement, nous pensons que le comportement asymptotique du déphasage nucléaire devrait être indépendant des effets coulombiens. Dans ces conditions si $\int W_1(\varkappa)\,\mathrm{d}\varkappa$ est fini, sa valeur ne devrait pas dépendre des effets coulombiens. On peut étudier [30] la question comme suit en supposant pour simplifier que $V(r)$ est d'un signe constant, $V(r) > 0$:

1° montrer que pour un potentiel de la famille considérée (IV.12) singulier en $r^{-2+\varepsilon}$ à l'origine, l'approximation de Born est valable à haute énergie, que le potentiel coulombien soit présent ou non ;

2° montrer que les approximations de Born, avec ou sans effets coulombiens, coïncident à haute énergie.

Donc

$$\left(\int \frac{W_1(\varkappa)\,\mathrm{d}\varkappa}{k^2+\varkappa^2}\right)_\mathrm{c} \Big/ \left(\int \frac{W_1(\varkappa)\,\mathrm{d}\varkappa}{k^2+\varkappa^2}\right)_\mathrm{nc} \to 1 \text{ pour } |k| \to \infty\,.$$

Par suite,

a) si $\int W_1(\varkappa)\,\mathrm{d}\varkappa$ converge (potentiels moins singuliers que $1/r$ à l'origine),

$$\int_{\mu/2}^\infty W_1(\varkappa)_\mathrm{c}\,\mathrm{d}\varkappa = \int_{\mu/2}^\infty W_1(\varkappa)_\mathrm{nc}\,\mathrm{d}\varkappa\,;$$

b) si $\int W_1(\varkappa)\,\mathrm{d}\varkappa$ diverge, ce qui est le cas physique,

$$W_1(\varkappa)_\mathrm{c}/W_1(\varkappa)_\mathrm{nc} \to 1 \qquad \text{si} \quad \varkappa \to \infty\,.$$

9. **Cas d'une interaction coulombienne attractive $\gamma < 0$.** — Nous voulons indiquer quelques modifications à apporter dans le cas d'une interaction coulombienne attractive $\gamma = M_0\,Z_1\,Z_2\,e^2 < 0$ (M_0, masse relative ; $Z_1\,Z_2 < 0$) super-

posée à une interaction du type exponentiel généralisé $V(r) = \int_a^\infty C(a)\ \mathrm{e}^{-ar}\ \mathrm{d}a$, $|C(a)| < M\ a^{1-\varepsilon}$. Si γ est négatif, u_S déterminé par (IV.2) devient complexe pour k réel à cause du terme $L(\lambda\ r)$; or la fonction $B(k)$ doit être réelle pour k réel pour admettre une représentation du type (IV.24). On définit donc

$$\bar{h}(\eta) = h\left(\frac{|\gamma|}{k}\right) = -\gamma_0 - \mathrm{Log}\,\frac{|\gamma|}{k} + \eta^2 \sum \frac{1}{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}^2 + \eta^2)},$$

$$\bar{u}_S = \omega + 2\,\gamma\,\mathrm{Log}(2\,|\gamma|\,r\,\mathrm{e}^{2\gamma_0 - 1})\,u_R\ ;$$

$\bar{u}_S$, comme $C\ G$, est réelle pour k réel et $C\ G = \bar{u}_S + 2\,\gamma\,\bar{h}(\eta)\,u_R$.

La fonction de portée effective devient

$$k\,C^2\,\mathrm{cotg}\,\delta + 2\,\gamma\,\bar{h}(\eta) = -\left(1 + \int_0^\infty u\ V\ \bar{u}_S\,\mathrm{d}r\right) \Big/ \int_0^\infty u\ V\ u_R\,\mathrm{d}r\,.$$

Alors, d'une part le numérateur et le dénominateur ont une structure analytique semblable à $A(k)$ et $B(k)$, d'autre part ils admettent le même type de représentations intégrales dont il reste à relier les deux fonctions de poids. On considère alors

$$\bar{I}(k) = C \int H^-\ V\ u\ \mathrm{d}r = \int_{a/2}^\infty \frac{\varkappa\,\overline{W}_2 + \bar{f}(k)\,W_1}{k^2 + \varkappa^2}\,\mathrm{d}\varkappa\,,$$

où $\bar{f}(k) = 2\,\gamma\,\bar{h}(\eta) - \mathbf{i}\,k\,C^2$, que l'on désire étudier dans $\mathrm{Im}\,k < 0$. Or, d'une part

$$\bar{f}(-\mathbf{i}\,\varkappa) = -2\,\gamma\,\gamma_0 - 2\,\gamma\,\mathrm{Log}\left(\frac{|\gamma|}{\varkappa}\right) - \varkappa + \frac{2\,\gamma^2}{\varkappa} \sum_1^\infty \frac{1}{\mathrm{n}\,[\mathrm{n} + (\gamma/\varkappa)]}\ ;$$

$\bar{f}(-\mathbf{i}\,\varkappa)$ est réelle pour $\varkappa > 0$ mais possède des pôles pour $\varkappa = |\gamma|/\mathrm{n}$ $(\mathrm{n} = 1, 2, \ldots)$; d'autre part, si on utilise la représentation intégrale de $C\,H^-$ donnée par Mott et Massey ([29] formule 4.8), on peut montrer qu'en dehors des mêmes pôles $k = -\mathbf{i}\,|\gamma|\,/\mathrm{n}$, $C \int H^-\ V\ u\ \mathrm{d}r$ est régulier dans le demi-plan inférieur k. Si $|\gamma| < a/2$, c'est-à-dire si les pôles sont en dehors de $-(\mathbf{i}\,a/2, \mathbf{i}\,\infty)$, alors on peut décalquer le raisonnement déjà fait pour $\gamma > 0$; en exprimant que la discontinuité de $\bar{I}(k)$ le long de $-\mathbf{i}\,a/2, -\mathbf{i}\,\infty$ est nulle on trouve $\varkappa\,\overline{W}_2(\varkappa) + \bar{f}(-\mathbf{i}\,\varkappa)\,W_1(\varkappa) \equiv 0$ pour tout $\varkappa \in [\mu/2, \infty]$. D'où

$$k\,C^2\,\mathrm{cotg}\,\delta + 2\,\gamma\,\bar{h}(\eta) =$$

$$= -\left\{1 - \int_{a/2}^\infty \left[\bar{f}(-\mathbf{i}\,\varkappa)\,W_1(\varkappa)/(k^2 + \varkappa^2)\right]\mathrm{d}\varkappa\right\} \Big/ \left\{\int_{a/2}^\infty \left[W_1(\varkappa)/(k^2 + \varkappa^2)\right]\mathrm{d}\varkappa\right\};$$

on en déduit alors aisément les propriétés de $S(k)$ comme pour $\gamma > 0$.

10. **Cas d'un potentiel de portée finie** $V\,(r) = 0$ **pour** $r > r_0$ $\gamma > 0$. —

$$S(k) = \frac{1 + \int_0^{r_0} \left[u_S + f(k)\,u_R\right] V\ u\ \mathrm{d}r}{1 + \int_0^{r_0} \left[u_S + f^*(k^*)\,u_R\right] V\ u\ \mathrm{d}r} = \frac{\mathcal{F}^-(k, r_0)}{\mathcal{F}^+(k, r_0)}\,.$$

Nous rappelons d'abord quelques propriétés établies précédemment :

a) coupure coulombienne partant de $k = 0$, axe k réel négatif ;

b) pôles de $f(k)$;

c) les zéros de $\mathcal{F}^+(k, r_0)$; le raisonnement précédent reste valable pour des potentiels de portée finie et montre que, dans $\mathrm{Im}\, k > 0$, si $\mathcal{F}^+(k, r_0) = 0$ on a un état lié et $\mathrm{Re}\, k = 0$;

d) nous voulons montrer maintenant que dans $\mathrm{Im}\, k > 0$, S possède une *singularité essentielle à l'infini.*

On utilise pour u la borne (IV.19), pour $C\,H^+$ la borne (IV.42), alors on trouve que $\mathcal{F}^+(k, r_0)$ reste borné quand $|k| \to \infty$. Pour $C\,H^-$, on n'a pas établi de borne dans $\mathrm{Im}\, k > 0$, mais les relations (IV.27 et 28) permettent d'utiliser les bornes (IV.18 et 20) pour u_R et u_S. Alors pour k assez grand, donc en dehors des pôles de $f(k)$, on montre aisément que $|C\,H^-| < \exp(\mathrm{Im}\, k\, r) \times$ une fonction de r croissant moins vite que toute exponentielle. A partir de là, on trouve

$$| S(k)\, \mathrm{e}^{2ikr} | \to 0 \quad \text{si } r > r_0\,, \qquad | S(k)\, \mathrm{e}^{2ikr} | \to \infty \quad \text{si } r < r_0\,.$$

Cette singularité essentielle est d'origine nucléaire car elle subsiste quand le potentiel coulombien est nul [8].

L'extension au cas $\gamma < 0$ est immédiate.

V. **Approximations pour la représentation intégrale de la fonction de portée effective**

La représentation intégrale de la fonction de portée effective donnée au chapitre précédent est interprétable en termes de potentiels. Par exemple, pour le cas non coulombien, A. Martin [10] a montré que pour des potentiels du type de Yukawa il existe une correspondance biunivoque entre l'originale $C(\varkappa)$ du potentiel et la discontinuité $\Delta(\varkappa)$ de la matrice $\boldsymbol{S}$.

Dans le cas coulombien, on peut déterminer les corrections d'ordre coulombien portant sur la discontinuité, puisqu'on a vu au chapitre IV la connexion entre la discontinuité et les approximations de Born successives (exemple, Wong & Noyes [24] pour $\varkappa \in [\mu, 2\,\mu]$). Nous pourrions donc, de cette manière, en utilisant la représentation intégrale de la fonction de portée effective et l'équation intégrale reliant la discontinuité et la fonction de poids, contrôler la validité de certains potentiels du type de Yukawa généralisé (par exemple, Matthews [3]).

Nous nous sommes limité dans ce chapitre à une étude purement phénoménologique de la fonction de portée effective. Pour cela nous avons d'abord considéré l'approximation de la discontinuité par des pôles, approximation bien connue dans le cas non coulombien. Nous avons cherché si nous pouvions trouver une limite théorique pour le paramètre de forme P, compatible avec les valeurs expérimentales de la longueur de diffusion et de la portée effective, en imposant une approximation qui réduise la fonction de portée effective à une forme quadratique en k^2. Ensuite, par utilisation de la méthode de Balázs [31], indépendamment de toute approximation de la discontinuité, nous avons cherché à déterminer une valeur numérique de P compatible avec les relations de dispersion et les données expérimentales à basses et hautes énergies.

1. **Approximation à un pôle** — Nous rappelons (IV.36) :

$$Q(k) = k\,C^2 \operatorname{cotg} \delta + 2\,\gamma\,h(\eta)\,. \tag{V.1}$$

En imposant $W(\varkappa) = W(z)\,\delta(\varkappa - z)$, on voit que remplacer la discontinuité par un pôle est équivalent (Chew [33]) à imposer à Q l'approximation linéaire en k^2 dite indépendante de forme : $Q = -(1/A) + (R\,k^2/2)$. L'équation de ce pôle moyen d'interaction est alors déterminée par $-1/A = f - (z^2/W)$ et $R = -2/W$, d'où, pour $z > \mu/2$,

$$z^2\,R + 2\,f(-\mathbf{i}\,z) + (2/A) = 0\,, \tag{V.2}$$

ce qui dans le cas neutre ($\gamma = 0$) donne deux positions possibles du pôle z

$$z = \left[1 \pm \left(\sqrt{1 - 2\,R/A}\right)\right]/R\,. \tag{V.3}$$

Nous voulons montrer que, dans cette approximation, l'équation du pôle d'interaction s'identifie à celle des états liés. Pour cela (chap. IV), nous annulons le dénominateur de S :

$$D(k) = 1 + \int_{\mu/2}^{\infty} \frac{W(\varkappa)\left[f^*(k^*) - f(-\mathbf{i}\,\varkappa)\right]}{k^2 + \varkappa^2}\,\mathrm{d}\varkappa = 0\,. \tag{V.4}$$

Tenant compte de ce que z vérifie (V.2) on trouve $D(\mathbf{i}\,x) = 0$ pour

$$x^2\,R + 2\,f^*(-\mathbf{i}\,x^*) + (2/A) = 0\,. \tag{V.5}$$

Si x est réel positif, $f(-\mathbf{i}\,x)$ est réel et (V.5) est identique à (V.2). Si (V.2) a deux solutions réelles positives $z_1 > \mu/2$ et $z_2 < \mu/2$ alors z_1 est nécessairement le pôle d'interaction et z_2 un état lié. Si dans (V.3) la solution avec le signe — est négative, elle pourra être interprétée comme un état antilié. On peut remarquer que les solutions de (V.5) sont celles de

$$k\,C^2 \operatorname{cotg} \delta - \mathbf{i}\,C^2\,k = -(1/A) + (R\,k^2/2) - 2\,\gamma\,h(\eta) - \mathbf{i}\,C^2\,k = 0$$

pour $k = \mathbf{i}\,x$. On peut donc donner une expression de la matrice $\boldsymbol{S}$ où interviennent explicitement ces pôles, cette expression est très simple dans le cas neutre :

$$\boldsymbol{S} = \frac{k \operatorname{cotg} \delta + \mathbf{i}\,k}{k \operatorname{cotg} \delta - \mathbf{i}\,k} = \frac{(k + \mathbf{i}\,z)\,(k + \mathbf{i}\,x)}{(k - \mathbf{i}\,z)\,(k - \mathbf{i}\,x)}\,. \tag{V.6}$$

Cette approximation est donc équivalente à la méthode bien connue de factorisation de la matrice $\boldsymbol{S}$ (Ma [34]). Cependant, en dehors du pôle d'état lié ou antilié qui était déjà interprété, on voit que les relations de dispersion permettent de considérer que l'autre pôle $z > \mu/2$ doit être relié à la position moyenne de l'interaction (Wong [27, 35]).

La relation entre discontinuité de $\boldsymbol{S}$ et fonction de poids, non encore explicitement utilisée dans cette approximation, va nous permettre d'introduire la deuxième caractéristique de l'interaction appelée la « force » du pôle. Dans l'équation (IV.43) posons $W(\varkappa) = -2\,\varkappa\,H(\varkappa)\,E(\varkappa)$, ceci pour faire intervenir la discontinuité réelle $H(\varkappa) = -\Delta(\varkappa)/2\,\varkappa\,C^2(\mathbf{i}\,\varkappa)$ de $\exp(\mathbf{i}\,\delta)\sin\delta/k\,C^2$ qui est l'analogue coulombien de l'approximation non relativiste des amplitudes partielles considérées dans la méthode dite N/D (Noyes [24 à 27]). L'équation reliant E et H devient

$$(V.7) \quad E(\varkappa_0) = -\left[1 + \int_{\mu/2}^{\infty} 2\,\varkappa\, E(\varkappa)\, H(\varkappa)\, \frac{f(-\mathbf{i}\,\varkappa) - f(-\mathbf{i}\,\varkappa_0)}{\varkappa^2 - \varkappa_0^2}\, d\varkappa\right].$$

Posons $H(\varkappa) = \lambda\,\delta(\varkappa - z)$; on en déduit $E(z) = -1/[\lambda\, g(z) + 1]$, où $g(z) = \partial f/\partial z$ et

$$(V.8) \quad -1/A = f(-\mathbf{i}\,z) + \tfrac{1}{2}\,z\left[\lambda^{-1} - g(z)\right], \qquad R = -\left[g(z)/z\right] - (\lambda\, z)^{-1}.$$

On voit qu'il est équivalent d'exprimer l'approximation indépendante de forme par les deux paramètres (A, R) ou par (z, λ). Wong & Noyes [24] ont d'ailleurs montré qu'étant donnée la position de z, si on exprime l'indépendance de charge par la condition que le couple (z, λ) soit le même pour ${}^1S_0$ dans les cas neutre et chargé, on réussit à expliquer plus de 90 % de la différence observée entre les inverses des longueurs de diffusion. D'autre part $\lambda^{-1} = -(g + R\,z)$, ce qui donne dans le cas neutre $\pm\sqrt{1 - (2R/A)}$ si le pôle d'interaction est donné par (V.3).

Application. — Pour la diffusion neutron-proton, dans les états triplet ou singulet il faut prendre comme pôles d'interaction ceux qui correspondent au signe + de (V.3) qui seuls sont supérieurs à $\mu\,\pi_0/2$. Les solutions avec le signe — donnent le deutéron avec une très bonne approximation (Wong [35]) et l'état antilié ${}^1S_0$. Pour le cas chargé on utilise (V.2) pour z et (V.8) pour X. Nous avons pris le système d'unités $\hbar = c = 1$ (tableau I).

Tableau I

	A (fermis)	R (fermis)	Z (fermis^{-1})	λ^{-1} (sans dimensions)	X (fermis^{-1})
$(\mathbf{n}\text{-}\mathbf{p})$ ${}^1S_0$	— 23,74 [36]	2,67 [36]	0,789 05	— 1,106 7	— 0,039 98
$(\mathbf{p}\text{-}\mathbf{p})$ ${}^1S_0$	— 7,77 [36]	2,77 [36]	0,738 8	— 1,091 8	
$(\alpha\text{-}\alpha)$ S	— 1 760 [37]	1,096 [37]	0,342 2	— 0,033 4	

L'indépendance de charge doit se traduire par des valeurs voisines de Z et de λ car nous n'avons pas tenu compte de la correction coulombienne pour la discontinuité $H(\varkappa)$ dans le cas chargé. Notons que les valeurs de λ^{-1} sont plus proches que celles de Z.

L'état antilié ${}^1S_0(\mathbf{n}\text{-}\mathbf{p})$ se trouve sur l'axe imaginaire $k < 0$. Où se trouve le « diproton », état correspondant pour la diffusion $(\mathbf{p}\text{-}\mathbf{p})$? Si dans (V.2) on fait $\gamma = 0$ dans $f(-\mathbf{i}\,z)$ en gardant les mêmes valeurs pour A et $R(\mathbf{p}\text{-}\mathbf{p})$, on obtient deux solutions du type (V.3), l'une positive, l'autre négative. Si γ est différent de 0 dans (V.2), la solution positive donne le pôle d'interaction, quant à la solution négative, elle n'existe plus car $f(-\mathbf{i}\,z)$ singulier pour $z = 0$ devient complexe pour $z < 0$. L'équation (V.5) en prenant x complexe et $\mathrm{Re}\,x < 0$ permettrait de déterminer sa position. C'est un effet dû à la coupure coulombienne le long de l'axe réel k négatif, qui déplace l'état antilié en dehors de l'axe imaginaire dans le demi-plan $\mathrm{Im}\,k < 0$ (feuillet non physique). Ceci illustre la différence

fondamentale qui existe entre les structures analytiques au voisinage de $k = 0$ des cas neutre et chargé.

2. **Approximation à deux pôles.** — Considérons l'approximation dite « dépendante de forme »

$$Q = -(1/A) + (R\,k^2/2) - P\,R^3\,k^4\,. \tag{V.9}$$

La valeur absolue, le signe et l'importance théorique de P ne sont pas encore clairement établis. Expérimentalement [38] on trouvait $P > 0$ sans pouvoir exclure P légèrement négatif ($-0{,}016$). L'analyse plus récente de Heller [39] n'est guère plus concluante $P = -0{,}03 \pm 0{,}06$. Du point de vue théorique on pensa même que le signe de P permettrait de départager entre les deux modèles d'interaction nucléon-nucléon : potentiels avec cœur dur et relations de dispersion. Mais de nombreux contre-exemples donnés par Perring & Phillips [40] d'une part, par Hamada & Johnston [41] d'autre part, montrèrent que des potentiels avec cœur dur pouvaient donner des valeurs positives de P. Plus récemment, Hara [42] a étudié la possibilité d'une connexion entre P et l'importance des contributions dues aux échanges de trois mésons π et plus. Dans la diffusion proton-proton à basse énergie interviennent des effets de polarisation du vide mais les valeurs de A et R portées dans le tableau I tiennent compte de ces corrections [39, 36].

L'approximation à un pôle réduit la fonction de portée effective à une forme linéaire en k^2 ; nous nous proposons donc, comme extension immédiate, une interaction à deux pôles réduisant la fonction de portée effective à l'approximation quadratique (V.9). Nous verrons que ceci impose $P < 0$ pour l'existence des deux pôles. On pourra alors donner une limite théorique compatible avec les relations de dispersion. Avec les valeurs numériques de A et $R(\mathbf{p}\text{-}\mathbf{p})$ on obtient $-0{,}018 < P$. Supposons donc $W(\varkappa) = W_1\,\delta(\varkappa - z_1) + W_2\,\delta(\varkappa - z_2)$; reportant dans (V.1) et imposant à Q de s'identifier à la forme (V.9), on obtient $W_2 = -W_1$ et deux équations couplées pour la position des pôles d'interaction

$$\begin{cases} 1/A = P\,r^3\,z_1^2\,z_2^2 + \{\,[z_1^2\,f(-\mathbf{i}\,z_2) - z_2^2\,f(-\mathbf{i}\,z_1)]/(z_2^2 - z_1^2)\,\}\,, \\ -R/2 = P\,r^3\,(z_1^2 + z_2^2) + \{\,[f(-\mathbf{i}\,z_2) - f(-\mathbf{i}\,z_1)]/(z_2^2 - z_1^2)\,\}\,. \end{cases} \tag{V.10}$$

Comme dans l'approximation précédente, on peut vérifier à l'aide de (V.10) que z_1 et z_2 sont des solutions $k = \mathbf{i}\,z$ de $k\,C^2\,\mathrm{cotg}\,\delta - \mathbf{i}\,C^2\,k = 0 = Q(k) - f^*(k^*)$; l'équation des pôles d'interaction est donc

$$G(z) = P\,R^3\,z^4 + \tfrac{1}{2}\,R\,z^2 + f(-\mathbf{i}\,z) + (1/A) = 0\,. \tag{V.11}$$

Dans le cas neutre, on a l'équivalent de (V.6), factorisation de $\boldsymbol{S}$ avec quatre pôles solutions de (V.11) [z pouvant alors être complexe].

On a toujours l'ambiguïté entre pôles d'interaction et états liés. En effet, reportant $W(z)$ dans (V.5), tenant compte des relations (V.10) entre les pôles on trouve $D(\mathbf{i}\,x) = 0$ pour

$$P\,r^3\,x^4 + \tfrac{1}{2}\,R\,x^2 + f^*(-\mathbf{i}\,x^*) + (1/A) = 0\,. \tag{V.12}$$

On a reporté dans la figure 3 et dans le tableau II quelques courbes $G(z, P)$ ainsi que les positions des pôles z_1 et z_2 et les « forces » correspondantes.

Tableau II

P	z_1	z_2	λ_1	λ_2	
0	0,738 86		— 0,915 8		1 pôle simple
— 0,01	0,818	2,062	— 1,18	0,36	2 pôles
— 0,018	1,018	1,201	— 4,2	3,38	
— 0,018 3	1,1				1 pôle double
< — 0,018 3					0 pôle

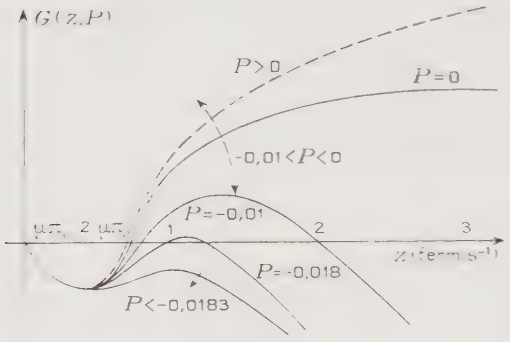

Fig. 3.

Si P est positif, on voit que l'on ne peut obtenir deux pôles et l'approximation faite n'apporte aucun renseignement. Par contre si P est négatif, avec les valeurs de A et R(**p-p**) données dans le tableau I on a comme limite $P > -0{,}018\,3$, en accord avec la limite expérimentale — 0,016.

Revenons à la valeur numérique trouvée pour l'état antilié (**n-p**) dans l'approximation à un pôle (ou deux pôles). Nous voulons montrer que cette valeur est une bonne approximation bien que nous n'ayons pas tenu compte de l'interaction complète. Une bonne approximation pour l'interaction est de la remplacer par un nombre arbitrairement grand de pôles $W(z) = \sum_1^N W_i\,\delta(z - z_i)$; reportant dans (V.1) on a $Q(k = \mathbf{i}\,z_i) = -f(-\mathbf{i}\,z_i)$ tandis que (V.4) donne alors $D(\mathbf{i}\,x) = 0$ pour $Q(\mathbf{i}\,x) = -f^*(-\mathbf{i}\,x^*) = 0$. On retrouve d'ailleurs comme cas particulier de ces équations (V.2, 5, 11 et 12).

Alors dans le cas neutre

$$-x + (1/A) + \tfrac{1}{2}\,R\,x^2 + P\,R^3\,x^4 + Q_1(x) \equiv 0\,,$$

où $|Q_1(x)|$ est très petit si $|x|$ est petit.

3. **Méthode d'approximation de Balázs.** — La limitation obtenue sur la valeur de P dans l'approximation précédente, valable à très basse énergie, est liée au modèle d'interaction choisi (approximation à deux pôles). D'une manière générale, les nombreuses valeurs de P obtenues pour divers potentiels (puits, Yukawa, exponentiel, cœur dur, ...) ou pour des approximations différentes de la coupure d'interaction, présentent l'inconvénient majeur de dépendre essentiellement de la forme particulière d'interaction considérée.

La méthode la meilleure serait évidemment celle où l'on pourrait calculer P en

ne faisant aucune approximation sur l'interaction. Or Balázs [31] a proposé récemment une méthode d'estimation numérique des équations dites N/D (sans corrections coulombiennes) indépendamment de toute approximation sur la discontinuité ou sur la fonction de poids. Nous nous proposons d'appliquer cette méthode à $Q(k)$.

Exprimant k et $\varkappa$ en unités $\mu\,\pi_0/2$ et faisant le changement variable $y = \varkappa^{-1}$, Q s'écrit

$$(V.13) \qquad Q(k) = -\left(1 + \int_0^1 C(k^2, y)\, U(y)\, dy\right) \Big/ \int_0^1 D(k^2, y)\, U(y)\, dy\,.$$

où nous posons

$$U(y) = y^{-1} W(y^{-1}),\ C(k^2, y) = -\left[y\, f(-i/y)\right]/(k^2 + y^2) \text{ et } D(k^2, y) = y/(k^2 y^2 + 1).$$

Balázs propose pour k appartenant à un certain domaine d'approximer les noyaux connus C et D par des termes de la forme

$$(V.14) \qquad C(k^2, y) = \sum_1^N C(k^2, y_i)\, m_i(y)\,, \qquad D(k^2, y) = \sum_1^N D(k^2, y_i)\, m_i(y)\,.$$

Comme on fait le choix des mêmes $m_i(y)$, la fonction de poids U n'apparaît plus que dans les intégrants de $\Delta_i = \int_0^1 U(y)\, m_i(y)\, dy$ et

$$(V.15) \qquad Q(k) = -\left[1 + \sum_1^N C(k^2, y_i)\, \Delta_i\right] \Big/ \sum_1^N D(k^2, y_i)\, \Delta_i\,.$$

Le nombre de Δ_i que l'on déterminera sera égal au nombre de données expérimentales indépendantes que l'on pourra introduire avec $Q(k)$: déphasages, A, R. Plus ce nombre est grand, mieux on peut approximer les noyaux C et D. Les Δ_i étant calculés numériquement, Q dépend de ces paramètres. Cette méthode permet donc d'obtenir un ajustement de résultats expérimentaux compatible avec les relations de dispersion.

1. Considérons d'abord le domaine des basses énergies où les approximations (V.14) sont le plus justifiables. Nous avons inclus comme données expérimentales A, R et deux déphasages $\delta(39{,}4\text{ MeV}) = 44^\circ$ et $\delta(68{,}3\text{ MeV}) = 34{,}5^\circ$ donnés par Stapp & *al.* [44]. Dans les figures 4 et 5 nous avons représenté les noyaux C et D pour certaines valeurs de l'énergie comprises entre 0 et 100 MeV et indiqué, à titre d'illustration, les courbes obtenues (solution a_1 du tableau III) pour des approximations de C et D du même type (V.14).

$$(V.16) \quad C(k^2, y) = \theta(y_2 - y)\left\{\left(\frac{y - y_2}{y_1 - y_2}\right)^2 \left[C(k^2, y_1) - C(k^2, y_2) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{C(k^2, y_3) - C(k^2, y_1)}{y_1 - y_3}(y_1 - y_2)\right] + C(k^2, y_2) + \frac{y - y_2}{y_3 - y_1}\left[C(k^2, y_3) - \right.$$
$$\left.\left. - C(k^2, y_1)\right]\right\} + \theta(y - y_2)\,\theta(y_3 - y)\left\{\left(\frac{y - y_3}{y_2 - y_3}\right)^2 \left[C(k^2, y_2) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - C(k^2, y_3) + (y_2 - y_3)\frac{C(k^2, y_2) - C(k^2, y_4)}{y_4 - y_2}\right] +$$

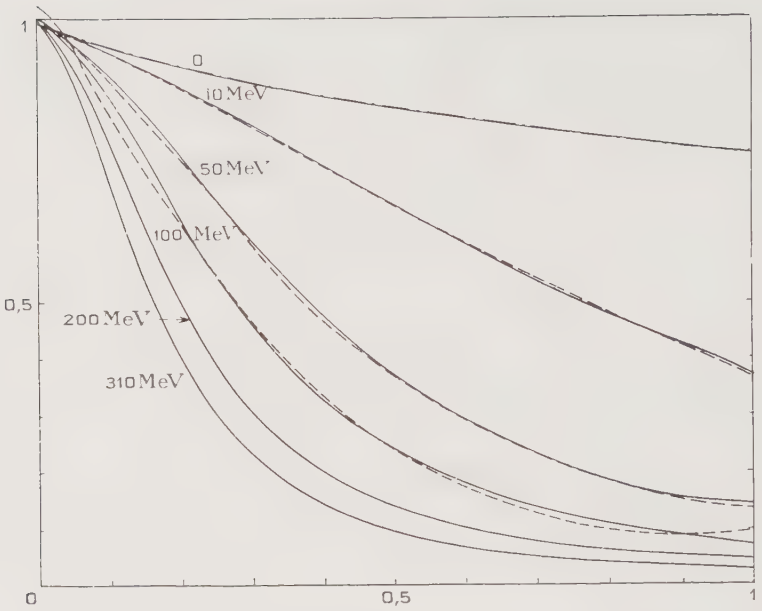

FIG. 4. — Courbes $C = -y\, f(-i/y)/(k^2 y^2 + 1)$: exactes ——— , approximations (V.16) — — — — avec $y_1 = 0{,}06$, $y_2 = 0{,}22$, $y_3 = 0{,}5$, $y_4 = 0{,}9$.

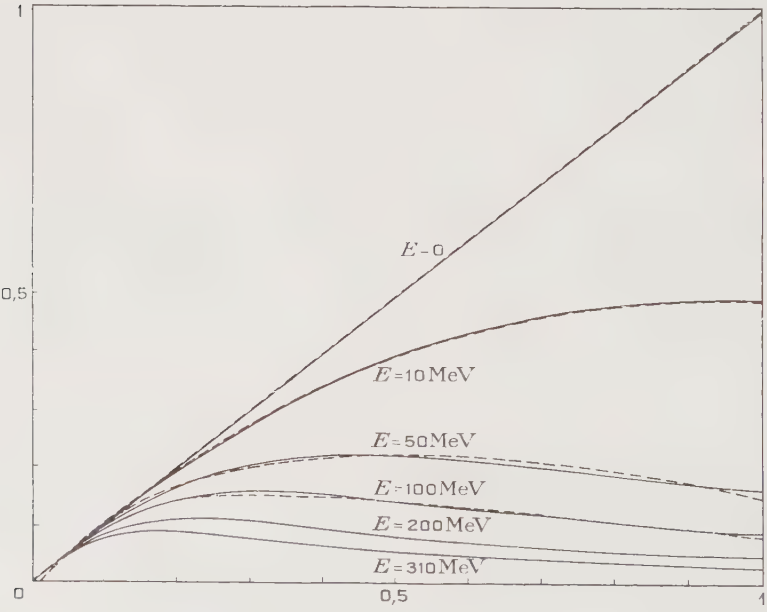

FIG. 5. — Courbes $D = y/(k^2 y^2 + 1)$: exactes ——— , approximations (V.16) — — — avec $y_1 = 0{,}06$, $y_2 = 0{,}22$, $y_3 = 0{,}5$, $y_4 = 0{,}9$.

$$+ C(k^2, y_3) + \frac{y - y_3}{y_4 - y_2}\left[C(k^2, y_4) - C(k^2, y_2)\right]\Bigg\} +$$

$$+ \theta(y - y_3)\Bigg\{\left(\frac{y - y_3}{y_4 - y_3}\right)^2\Bigg[C(k^2, y_4) - C(k^2, y_3) + \left[C(k^2, y_4) -$$

$$- C(k^2, y_2)\right]\frac{y_4 - y_3}{y_2 - y_4}\Bigg] + C(k^2, y_3) + \left[C(k^2, y_4) - C(k^2, y_2)\right]\frac{y - y_3}{y_4 - y_2}\Bigg\}.$$

On fait d'abord le choix d'un système de y_i tel que les approximations (V.16) soient les meilleures pour les noyaux C et D. Pour cette approximation a_1 ($y_1 = 0{,}06, y_2 = 0{,}22, y_3 = 0{,}5, y_4 = 0{,}9$), on trouve $P = 0{,}069$. Il faut ensuite s'assurer de la stabilité de la valeur numérique de P trouvée ou encore contrôler la validité de la méthode d'approximation. Pour cela, on déplace légèrement les positions des y_i de a_1 (tableau III), on voit que la valeur de P compatible avec les données introduites est peu différente de 0,07 ; en accord avec la valeur déterminée par Noyes & Wong [27] (o.p.e.p. + un pôle). Ces approximations donnent un déphasage qui s'annule aux environs de 265 MeV. Donc, si on considère P déterminé de cette manière par des résultats inférieurs à 70 MeV, la situation est relativement claire (signe et valeur absolue de P), mais le prolongement des solutions donne toujours un déphasage qui s'annule à des énergies nettement supérieures à 250 MeV *ce qui est en contradiction avec l'expérience.* On peut aussi noter que dans ces approximations, plus la valeur de P est faible, plus les valeurs de $E(\delta = 0)$ se rapprochent de 250 MeV. Il semble donc que cette valeur de P ainsi déterminée soit surestimée.

2. Essayons maintenant d'étendre cette méthode au cas des hautes énergies où l'on peut penser que l'influence du cœur dur doit fortement intervenir. Notons que des objections sérieuses s'opposent à cette extension. D'une part, il est possible que les corrections relativistes soient importantes, d'autre part, la validité d'approximations du type (V.14 et 16) devient plus délicate dans les régions y faible ($\varkappa$ très grand). Nous ne pourrons donc que donner une signification qualitative au comportement des diverses approximations.

Nous imposons donc [45] $\delta(210\text{ MeV}) = 5{,}9^\circ$, ce qui donne un nouveau terme (y_5, Δ_5).

On voit (tableau III) d'une part que la valeur de P diminue, environ 0,064, d'autre part $E(\delta = 0)$ est d'environ 253 MeV. Il faut noter (tableau III) qu'en déplaçant les y_i on obtient une meilleure stabilité aussi bien pour la valeur de P que pour celle de $E(\delta = 0)$. Ici se pose un problème d'ordre expérimental. Si le déphasage s'annule au-dessous de 250 MeV, alors la valeur de P est sûrement inférieure à la valeur trouvée. De toutes façons même si le déphasage s'annule légèrement au-dessus de 250 MeV, pour s'assurer que cette valeur de P est vraiment significative, il faudrait alors introduire un plus grand nombre de données expérimentales entre 100 et 300 MeV pour pouvoir suivre les variations de C et D dans les régions où y est faible (ou $\varkappa$ grand). Ceci est important pour bien reproduire le comportement des intégrants quand $\varkappa \gg 1$ dans les intégrales définissant Q [cf. $A(k)$ et $B(k)$ du chap. IV]. Il faut se rappeler qu'il a été montré que quand

Tableau III

	y_1	y_2	y_3	y_4	P	$E(\delta=0)$	y_5	P	$I\ (\delta=0)$
a_1	0,06	0,22	0,5	0,9	0,069	261	0,14	0,066	253
a_2	—	—	0,6	—	0,070	262	—	0,065	253
a_3	—	—	0,4	—	0,068	261	—	0,066	252
b_1	—	0,26	0,5	—	0,074	273	0,16	0,064	253
c_1	0,04	—	—	—	0,075	275	—	0,064	253
c_2	—	0,14	—	—	0,066	255	0,22	0,064	253
c_3	—	0,22	—	—	0,07	265	0,12	0,062	253

$k \to \infty$ le comportement de ces fonctions A et B, interprétées en termes de potentiels, est principalement lié à la forme de la singularité en r à l'origine.

VI. **Propriétés analytiques de la matrice S par rapport à la force du potentiel pour des potentiels du type de Yukawa**

On a recherché les propriétés analytiques de la matrice S par rapport au couple k ($E_1 = k^2/2\ M_0$ étant l'énergie) et G force du potentiel, dans l'équation de Schrödinger, en analogie avec les travaux de Regge sur le couple (k, l du potentiel centrifuge). Quelques propriétés des trajectoires, analogues aux trajectoires de Regge, sont obtenues. Certaines de ces propriétés, liées à la convergence du développement de Born, ont déjà fait l'objet de nombreux travaux : Jost & Pais [46], Kohn [47], Davies [48], Bosco [32]. Dans le cas de la diffusion nucléon-nucléon, les forces singulet et triplet appartiennent à la même trajectoire qui correspond à des valeurs de $E_1 < 0$ appartenant aux feuillets physique et non physique. L'importance des propriétés analytiques des trajectoires au voisinage de $k = 0$ est mise en relief. En fait, au voisinage de $k = 0$, si nous supposons que le potentiel reste d'un signe constant, la trajectoire des états liés et antiliés et celle des pôles k réels (analogues aux pôles de Regge) pour un l fixé, correspondent à la même fonction analytique, solution implicite unique de la fonction de Jost correspondante. Donc dans le voisinage de $k = 0$ l'une de ces trajectoires détermine l'autre et réciproquement. Dans cette étude les potentiels du type de Yukawa et les propriétés établies dans les chapitres I et II ont été plutôt considérés comme un « outil » pratique, permettant d'explorer commodément le feuillet non physique et de donner des relations explicites entre les parties réelles et imaginaires des pôles qui s'y trouvent, donc de caractériser simplement les trajectoires.

1. **Introduction.** — Le travail de Regge et de ses collaborateurs [4, 11, 12] doit pouvoir s'étendre au cas où l'on étudierait les propriétés analytiques de la

matrice $\boldsymbol{S}$ relativement à la force G d'un potentiel $G\,V(r)$ figurant dans l'équation radiale de Schrödinger. Au lieu de prendre l complexe dans le potentiel centrifuge $-l\,(l+1)/r^2$, on fixe pour l une valeur physique entière, tandis que G est pris complexe. Nous supposons, pour simplifier, que $G\,V(r)$ est tout le potentiel agissant et que $V(r)$ garde un signe constant, restrictions qui pourraient être levées. Plusieurs questions apparaissent immédiatement.

1. On peut espérer des résultats analogues à ceux de Regge, notamment des trajectoires des pôles de $\boldsymbol{S}_l(k, G)$ dans le plan de la variable G, semblables à celles de Regge dans le plan de la variable $-(l+\frac{1}{2})^2$, en particulier dans le feuillet physique en $E = k^2$, des trajectoires réelles pour les états liés et des trajectoires avec $\mathrm{Im}\ G \neq 0$ pour les pôles k réels. Pour ces derniers on peut penser (9) que les pôles (k réel, G complexe, $\mathrm{Im}\ G$ très petit) sont reliés comme les pôles de Regge aux résonances physiques (k complexe, G réel, $\mathrm{Im}\ k$ petit et négatif).

2. Jost & Pais [46] ont été les premiers à montrer un autre aspect intéressant de ces trajectoires (pôles k réel). Elles permettent de déterminer la convergence des développements de Born pour les ondes partielles et pour l'amplitude totale de diffusion. Kohn [47] et Davies [48] dans cette direction d'étude ont cherché si la condition de non-existence d'un état lié ($k = 0$) pour le potentiel entraîne ou non la convergence des divers développements de Born pour les ondes partielles et pour l'amplitude totale.

3. Dans le cas de la diffusion **n-p** on a deux valeurs physiques G_{singulet} et G_{triplet} qui se trouvent toutes deux sur la même trajectoire $l = 0$. G_t est obtenu pour la valeur $E = -\varkappa^2 < 0$ ($k = \mathbf{i}\,\varkappa, \varkappa > 0$) du deutéron (la force tenseur étant négligée), G_s se trouve sur la trajectoire $k = -\mathbf{i}\,\varkappa$ ($\mathrm{Im}\ k < 0$), donc dans le deuxième feuillet généralement non considéré dans l'étude des pôles de Regge.

4. En fait, nous verrons que les propriétés considérées en *2* et *3* s'expliquent naturellement si on étudie l'analyticité des trajectoires au voisinage de $k = 0$, donc dans les deux demi-plans $\mathrm{Im}\ k > 0$ et $\mathrm{Im}\ k < 0$. Nous avons considéré les potentiels du type de Yukawa (et les transformations des chap. I et II) car, bien qu'ils soient fortement restrictifs, ils permettent d'explorer commodément le feuillet non physique. Notons cependant qu'une classe plus large de potentiels $V \underset{r\to\infty}{\simeq} \mathrm{Cte}\,\exp(-\mu\, r)$ définissent la matrice $\boldsymbol{S}$ dans un domaine partiel du feuillet non physique comprenant l'origine. C'est pourquoi beaucoup de nos résultats sont valables pour cette classe plus grande de potentiels.

2. **Fonctions de Jost et matrice** $\boldsymbol{S}$. — Nous partons de l'équation radiale de Schrödinger où nous supposons k et G complexes

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + k^2 - \frac{l\,(l+1)}{r^2}\right] u_l(r) = G\,V(r)\,u_l(r)\,. \qquad \text{(VI.1)}$$

(9) En fait, K. Meetz [49], dans une étude très récente, a montré rigoureusement la connexion entre ces pôles (k réel, $\mathrm{Im}\,G$ petit) et les résonances physiques (G réel, k complexe, $\mathrm{Im}\ k < 0$ et petit).

On définit comme habituellement, deux solutions

$$(IV.2) \qquad \varphi_l(k, G, r) \underset{r\to 0}{\simeq} r^{l+1}, \qquad f_l(k, G, r) \underset{r\to\infty}{\simeq} \exp(-\mathbf{i}\, k\, r)$$

et les fonctions de Jost par les wronskiens

$$(VI.3) \quad f_l(k, G) = \lim_{r\to 0} r^l f_l(k, G, r), = W\left[f_l(k, G, r), \varphi_l(k, G, r)\right].$$

Déjà nous obtenons (théorème de Poincaré) pour tout r fini, étant donné (VI.1) et les conditions aux limites (VI.2) : φ_l est une fonction entière de k^2 et de G ; f_l est régulière en k pour $\mathrm{Im}\, k < 0$ et analytique en G.

$f_l(k, G)$ est [10] analytique en G et k pour $\mathrm{Im}\, k < 0$ et G non infini. Si nous voulons obtenir les propriétés d'analyticité dans $\mathrm{Im}\, k > 0$, il faut *comme pour G réel*, expliciter les potentiels. Pour des potentiels décroissant comme $\exp(-\mu\, r)$ nous nous attendons [10] à pouvoir prolonger ces propriétés dans la bande $\mathrm{Im}\, k < \mu/2$ et pour des potentiels du type superposition d'exponentielles (que nous avons considéré dans les chapitres précédents) dans le plan k entier privé de la coupure $\mathbf{i}\,\mu/2, \mathbf{i}\,\infty$. En fait pour ce dernier cas on pourrait le montrer de deux façons :

a) appliquer comme au chapitre IV la méthode de Regge [10], r est considéré comme une variable complexe dans $\mathrm{Re}\, r > 0$, ce qui permet de faire tourner le demi-plan $\mathrm{Im}\, k < \mu/2$ et d'obtenir les propriétés d'analyticité dans le plan k coupé $(+\mathbf{i}\,\mu/2, \to \mathbf{i}\,\infty)$ G étant toujours complexe ;

b) utiliser la méthode d'itération par les transformations de Hankel (chap. I et II) ; $f_l(k, G)$ est de la forme $\left[\text{numérateur de (II.12)}, \lim_{r\to 0} r^l R_l(-k, r)\right]$

$$\mathrm{Cte}\left[\frac{1}{(-k)^l} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \int_{n\mu}^{\infty} \rho_{l,n}(\alpha, -k)\left(\frac{1}{-k + \mathbf{i}\,\alpha}\right)^l \mathrm{d}\alpha\right] =$$

$$= \mathrm{Cte}\left[\frac{1}{(-k)^l} + \sum_{1}^{\infty} G^n\, a_n(k)\right].$$

Nous voyons donc que pour l'étude de la convergence absolue de la série, nous sommes ramené à des études antérieures portant sur G *réel*. Pour la suite nous supposerons toujours G et k non infinis.

En résumé pour des potentiels du type de Yukawa, la fonction de Jost est analytique dans les plans G et k (coupé $\mathbf{i}\,\mu/2 \to \mathbf{i}\,\infty$) avec un pôle d'ordre l en $k = 0$.

Nous avons, d'une part, la relation habituelle entre la solution physique φ_l et les ondes entrantes et sortantes f_l

$$(VI.4) \quad \varphi_l = \frac{2l+1}{2\,\mathbf{i}\,k}\left[f_l(-k, G, r)\, f_l(k, G) - f_l(k, G, r)\, f_l(-k, G)\right]$$

et, d'autre part, l'expression de la matrice $\mathbf{S}_l$ à partir des fonctions de Jost

$$(VI.5) \qquad \mathbf{S}_l(k, G) = (-1)^l\, f_l(k, G)/f_l(-k, G).$$

[10] Pour établir rigoureusement ce résultat, on peut étendre au couple (k, G) la méthode utilisée par Bottino, Longoni & Regge [12] au couple (k, l). On considère les équations intégrales de φ_l et f_l déduites de (VI.1) et correspondant aux conditions aux limites (VI.2). Par itération de ces équations intégrales et majoration des termes itérés, on déduit sans difficulté les propriétés d'analyticité reportées en (k, G).

Les relations précédentes nous permettent d'écrire les symétries :
1° pour les fonctions,

(VI.6) $\varphi_1(k, G, r) = \varphi_1(-k, G, r) = \varphi_1^*(k^*, G^*, r)$, $f_1(k, G, r) = f_1^*(-k^*, G^*, r)$;

2° pour $\boldsymbol{S}_1$,

(VI.7) $$\boldsymbol{S}_1(k, G) = \boldsymbol{S}_1^{-1}(-k, G) = \boldsymbol{S}_1^*(-k^*, G^*) .$$

Nous nous intéresserons aux pôles de $\boldsymbol{S}_1$ donnés par les zéros de la fonction de Jost

(VI.8) $$f_1(-k, G) = 0 .$$

Considérons une solution (k_0, G_0) de (VI.8) telle que k_0 et G_0 soient complexes et Im G petit. Déplaçons ces valeurs en maintenant la relation $f_1(-k, G) = 0$ de telle sorte que $(k_0, G_0) \to (k_1, G_1)$, où G_1 est réel. Pour ce couple de valeurs vérifiant (VI.8) avec G_1 réel on a, en général, Re $k_1 \neq 0$, Im $k_1 < 0$, état résonnant ; on peut cependant aussi aboutir à un état lié ou antilié Re $k_1 = 0$.

Si on considère au départ les solutions (k_0, G_0) dans l'ensemble des plans complexes k, G on a un très grand arbitraire relativement au problème physique car un couple (k_1, G_1) de valeurs physiques peut être obtenu par déplacement à partir de k_0, G_0 quelconque. Comme Regge nous prendrons donc les solutions k réel, G complexe, ce qui présente le même degré d'arbitraire que k complexe, G réel quelconque. Soit (k_2, G_2) une telle solution, k_2 étant réel. Si le déplacement qui conduit à G_1 réel, k_1 complexe est petit, on sera assuré d'aboutir à une résonance Re $k_1 \simeq$ Re $k_2 \neq 0$. Si Im G_2 est petit on peut conduire G_2 en $G_1 = G_2 - \mathbf{i}\,\mathrm{Im}G_2$; alors $k_2 \to k_1 = k_2 + \Delta k_2$, où

$$\Delta k_2 \simeq -\mathbf{i}\,\mathrm{Im}G_2 \left(\frac{\partial f_1/\partial G}{\partial f_1/\partial k}\right)_{(k_1, G_1)} , \qquad \text{car} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial G}\Delta G = \frac{\partial f_1}{\partial k}\Delta k$$

pour les petits déplacements. (k_1, G_1) est une résonance physique si G_1 a la valeur du problème physique ; seuls *les points des trajectoires* G (k *réel*) *coupant* Re$G = G$ *physique ont un intérêt.* Cependant dans la diffusion **n-p** la même trajectoire (G réel, k imaginaire pur) donne l'état antilié singulet et l'état lié triplet.

Pour ce qui suit nous restreignons notre étude ([11]) au cas où $V(r)$ *a un signe constant* $V(r) > 0$.

3. **Potentiels de portée finie.** — Nous considérons le cas simple de la diffusion dans l'état $l = 0$ par un potentiel de portée finie $V(r) = 0$ pour $r > r_0$. Il est instructif d'étudier les solutions (k_1, G_1 réel), (k_2 réel, G_2) et de vérifier qu'elles peuvent être obtenues par déplacement à partir de (k_0 complexe, G_0 complexe, Im$G \ll 1$). Si $u(r)$ est la fonction d'onde telle que $u(r = 0) = 0$ la matrice $\boldsymbol{S}_0$ s'écrit [8]

(VI.9) $$\boldsymbol{S}_0(k) = \left(\frac{u' + \mathbf{i}\,k\,u}{u' - \mathbf{i}\,k\,u}\right)_{r=r_0} \mathbf{e}^{2\mathbf{i}kr_0} , \quad f_0(-k, G) = (u' - \mathbf{i}\,k\,u)_{(r_0)} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}kr_0}}{2\,\mathbf{i}\,k} ;$$

([11]) Les modifications dues à un nombre fini de changements de signe de $V(r)$ ont été étudiées par divers auteurs : Kohn [47], Meetz [49], R. Nataf & H. Cornille [50].

multipliant l'équation de Schrödinger par u^* et intégrant, en tenant compte de $u'(r_0) = \mathbf{i}\, k\, u(r_0)$ qui assure que (k, G) est un pôle de S_0 solution de (VI.8), on obtient

$$\text{(VI.10)} \quad \begin{cases} \operatorname{Re} k \left[|u|^2_{r_0} + 2 \operatorname{Im} k \int_0^{r_0} |u|^2 \, dr \right] = \operatorname{Im} G \int_0^{r_0} V\, |u|^2 \, dr\,, \\ - \operatorname{Im} k\, |u(r_0)|^2 - \int_0^{r_0} |u'|^2 \, dr + \\ \qquad + \left[(\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 \right] \int_0^{r_0} |u|^2 \, dr = \operatorname{Re} G \int_0^{r_0} V\, |u|^2 \, dr\,. \end{cases}$$

1° Si $\operatorname{Im} G = 0$ on retrouve les pôles habituels : $\operatorname{Im} k > 0$, $\operatorname{Re} k = 0$ et *G réel toujours négatif* ; $\operatorname{Im} k < 0$ dans ce cas soit $\operatorname{Re} k = 0$, soit $\operatorname{Re} k \neq 0$.

2° Pour k réel $\neq 0$, on a toujours G complexe et $\operatorname{Im} G$ a le signe de k.

3° Pour k nul, G est réel et négatif.

4° Soit donc un pôle (k_0, complexe, G_0 complexe) vérifiant (VI.10) :

a) si k_0, $G_0 \to k_1$, G_1 (G_1 réel) on obtient bien : soit $\operatorname{Re} k_1 = 0$, états liés et antiliés ; soit $\operatorname{Re} k_1 \neq 0$, $\operatorname{Im} k_1 < 0$, état résonnant :

b) si k_0, $G_0 \to k_2$, G_2 (k_2 réel) $\operatorname{Im} G_2$ a le signe de k_2.

4. **Cas de l'onde S : pôles (k, G) complexes pour des potentiels du type de Yukawa.** — Soit

$$\text{(VI.11)} \quad V(r) = \int_\mu^\infty C(\alpha) \exp(-\alpha r)\, d\alpha\,, \quad |C(\alpha)| < \text{Cte}\, \alpha^{1-\eta}\,.$$

1. Relations entre les parties réelles et imaginaires des pôles (k, G). — (VI.8) pour des valeurs fixées de l et de k a, en général, plusieurs racines $G_l(k)$ ou même un nombre infini (cf., par exemple, [46] pour le potentiel de Hulthen).

La notation $G_l(k)$ représente l'une d'elles, l'indice (n par exemple) qui la désigne étant omis. Pour un pôle (k, G) la solution physique ($l = 0$) telle que $\varphi_0(k, G, r) \underset{r\to 0}{\simeq} r$ s'écrit ([12]) d'après (VI.4),

$$\text{(VI.12)} \quad \varphi = f_0(k, G)\, f(-k, G, r)/2\,\mathbf{i}\,k\,, \quad \varphi \underset{r\to\infty}{\simeq} f_0(k, G)\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}kr}/2\,\mathbf{i}\,k\,.$$

Si nous voulons obtenir, comme pour les potentiels de portée finie, des relations déduites de l'équation de Schrödinger, compatibles avec l'existence d'un pôle (k, G) nous voyons, d'après le comportement asymptotique (VI.12), que des difficultés de convergence à l'infini vont s'introduire si $\operatorname{Im} k \leq 0$ (en particulier pour les résonances physiques, les états antiliés et les pôles k réels).

Revenons à l'équation

$$\text{(VI.13)} \qquad \varphi''\, \varphi^* + k^2\, |\varphi|^2 - \frac{l\,(l+1)}{r^2}\, |\varphi|^2 = G\, V\, |\varphi|^2$$

que l'on désire intégrer de 0 à ∞ pour obtenir les relations simples entre les pôles. Ici on prend $l = 0$. L'intégrale $\int_0^r V\, |\varphi|^2\, dr$ converge quand $r \to \infty$ pour

([12]) K. Chadan [51] a étudié $f(-\mathbf{i}\varkappa, G) = 0$ pour $\varkappa > \mu/2$ et G réel, c'est-à-dire un état lié localisé sur la coupure de $f(k, G)$. Si $\varkappa \neq \mu/2$, pour des potentiels du type (VI.11), la relation (VI.12) garde un sens.

$\mathrm{Im}\, k > -(\mu/2) + \varepsilon$ et le deuxième membre de (VI.13) aura donc un sens. Nous devons donc pouvoir donner un sens au premier membre. Pour la famille de potentiels considérée, nous devons même pouvoir sortir du demi-plan puisque nous savons que $f_0(-k, G)$ pour k et G complexes n'a pour seule singularité en k que la coupure ($-\mathbf{i}\,\mu/2 \to -\mathbf{i}\,\infty$). On doit donc pouvoir étendre au feuillet non physique en $E = k^2$ ($\mathrm{Im}\, k < 0$) les relations simples entre les parties réelles et imaginaires des pôles de $\boldsymbol{S}$ qui s'obtiennent immédiatement dans le feuillet physique ($\mathrm{Im}\, k > 0$) par intégration de (VI.13). Nous pourrons en particulier montrer ainsi que les états liés et antiliés appartiennent bien à la même trajectoire de singularités ($\mathrm{Im}\, G = 0$, $\mathrm{Re}\, k = 0$). Vu sous cet angle, l'état antilié ${}^1S_0$ neutron-proton et le deutéron sont de natures semblables. A. Martin [8] a étudié les solutions $f(-k, G, r) = [G \text{ réel}]$ pour des potentiels du type (VI.11) en utilisant la transformation de Laplace ; f s'écrit $f(-k, G, r) = \mathbf{i}\, R_0(k, G, r)$, R_0 étant défini par (II.5) et (II.7) avec $r_c = 0$,

$$f = \mathbf{i}\, R_0 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}kr}\left[1 + \int_0^\infty \rho_{k,G}(\alpha)\, \mathbf{e}^{-\alpha r} \mathrm{d}\alpha\right] \tag{VI.14}$$

$$= \mathbf{e}^{\mathbf{i}kr} + g\,(k, r) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}kr}\left[1 + \psi(k, r)\right].$$

Cette transformation, nous le rappelons, s'identifie aux transformations par les fonctions de Hankel que nous avons considérées dans les chapitres I et II. Nous allons d'ailleurs utiliser la propriété essentielle de la transformée ρ de ψ qui est $\rho \equiv 0$ pour $\alpha < \mu$ et qui conduisait aux propriétés d'itération étudiées. Nous considérons G complexe et, comme toujours dans ce chapitre, k et G non infinis.

A) Demi-plan $\mathrm{Im}\, k > -(\mu/2) + \varepsilon$. — Posons $C(k) = f(k, G)/2\,\mathbf{i}\, k$, alors pour $f(-k, G) = 0$ on a $\varphi = C f \underset{r\to 0}{\simeq} r$ et $g \underset{r\to 0}{\simeq} -1 + (C^{-1} - \mathbf{i}\, k)\, r$. Il est facile de voir que pour $r > r_0$ (r_0 suffisamment grand et fini), pour $\mathrm{Im}\, k > -(\mu/2) + \varepsilon$ (ε positif et petit), $|g|$, $|\partial g/\partial r|$, $|\partial^2 g/\partial r^2|$, $|\partial g/\partial k|$, $|\partial^2 g/\partial k\, \partial r|$ sont bornés par des expressions de la forme

(VI.15)

$\mathbf{e}^{-\mathrm{Im}\, kr}\, \mathbf{e}^{-\mu r}\, |\mathrm{Cte}| \times$ fonction de r croissant moins vite que toute exponentielle. L'intégration de (VI.13), après quelques intégrations par parties justifiables d'après (VI.15), nous donne un premier membre en général complexe

$$|C|^2\, \mathrm{Re}\, k \left\{ 2\, \mathrm{Im}\, k \int_0^\infty \left[|g|^2 + 2\, \mathrm{Re}\,(g\, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}k^* r})\right] \mathrm{d}r + 1 \right\} = \tag{VI.16}$$

$$= \mathrm{Im}\, G \int_0^\infty V\, |\varphi|^2\, \mathrm{d}r\,,$$

$$|C|^2 \left\{ \left[(\mathrm{Re}\, k)^2 - (\mathrm{Im}\, k)^2\right] \int_0^\infty |g|^2\, \mathrm{d}r - \int_0^\infty |g'|^2\, \mathrm{d}r - \right. \tag{VI.17}$$

$$\left. - 4\, \mathrm{Im}\, k\, \mathrm{Re}\, k \int_0^\infty \mathrm{Im}\,(g\, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}k^* r})\, \mathrm{d}r + \mathrm{Im}\, k \right\} = \mathrm{Re}\, G \int_0^\infty V\, |\varphi|^2\, \mathrm{d}r\,;$$

les formules (VI.16) et (VI.17) sont les extensions pour la famille de potentiels considérée de (VI.10) pour les potentiels de portée finie.

a) Im $G = 0$. — Deux possibilités :

$$\text{(VI.18)}\quad \operatorname{Re} k \neq 0 \text{ et } 2 \operatorname{Im} k \int_0^\infty \left[|g|^2 + 2 \operatorname{Re}\left(g\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^* r}\right)\right] \mathrm{d}r + 1 = 0 .$$

Supposons Im $k > 0$; (VI.18) se réduit à Im $k \int |f|^2 \, \mathrm{d}r = 0$, ce qui est impossible donc Re $k = 0$. Si Im $k < 0$, alors (VI.18) peut avoir des solutions Re $k \neq 0$, Im $k \neq 0$. On retrouve évidemment toutes les possibilités des pôles G réel.

Re $k = 0$, états liés et antiliés, $k = \mathrm{i}\varkappa$; $G = \operatorname{Re} G$ se réduit, d'après (VI.17), à

$$\text{(VI.19)}\qquad |C|^2 \left[\varkappa - \int_0^\infty \left(\varkappa^2 |g|^2 + |g'|^2\right) \mathrm{d}r\right] = G \int_0^\infty V |\varphi|^2 \, \mathrm{d}r .$$

Si $\varkappa > 0$, états liés ; $f(-\mathrm{i}\varkappa, G, r)$ étant intégrable, on peut montrer que (VI.19) est équivalent à

$$\text{(VI.20)}\qquad -\int_0^\infty \left(\varkappa^2 |\varphi|^2 + |\varphi'|^2\right) \mathrm{d}r = G \int_0^\infty V |\varphi|^2 \, \mathrm{d}r .$$

Pour $\varkappa$ positif ou négatif on a donc *toujours* $G(\varkappa) \equiv \operatorname{Re} G(\varkappa) < 0$.

b) k *réel* $\neq 0$. G est complexe et Im G a le signe de k ; on a, d'après (VI.16) et (VI.17),

$$\text{(VI.21)}\quad \begin{cases} \operatorname{Im} G = |C(k)|^2 \, k \Big/ \displaystyle\int_0^\infty V |\varphi|^2 \mathrm{d}r = k \Big/ \int_0^\infty V |f(-k, G, r)|^2 \, \mathrm{d}r , \\ |C|^2 \left(k^2 \displaystyle\int |g|^2 \, \mathrm{d}r - \int |g'|^2 \, \mathrm{d}r\right) = \operatorname{Re} G \int_0^\infty V |\varphi|^2 \, \mathrm{d}r . \end{cases}$$

c) $k = 0$. — Soit un pôle (k, G) tel que $k \simeq 0$; les majorations (VI.15) nous permettent de passer à la limite $k \to 0$ dans les relations (VI.17) et (VI.18) donc en maintenant $f(-k, G) = 0$ si

$$\lim_{k\to 0} C(k) = \lim_{k\to 0} \frac{f(k, G)}{2\,\mathrm{i}\,k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(k, G) - f(-k, G)}{2\,\mathrm{i}\,k} = -\mathrm{i} \left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)_{k=0}$$

existe. Or Newton [52] a établi, en passant à la limite pour un état lié ($\varkappa > 0$), que $(\partial f/\partial \varkappa)_{\varkappa=0} \neq 0$ quand $f(k = 0) = 0$; $f(k, G)$ étant analytique au voisinage de $k = 0$, $(\partial f/\partial k)_{k=0}$ ou la limite $\lim_{k\to 0} C(K)$ existe quel que soit le chemin suivi. Nous allons donc déterminer la limite réelle $G(0)$ soit pour les états liés et antiliés (VI.19), soit pour les pôles k réels (VI.21)

$$\text{(VI.22)}\qquad \lim_{\varkappa>0 \text{ ou } \varkappa<0 \;\varkappa\to 0} G(\varkappa) = \lim_{k \text{ réel} \to 0} G(k)$$
$$= -\int_0^\infty |g'(r, 0)|^2 \, \mathrm{d}r \Big/ \int_0^\infty V \left[1 + g(r, 0)\right]^2 \mathrm{d}r .$$

Remarquons qu'il est facile de montrer, pour la famille de potentiels choisie, que $\lim_{\varkappa\to 0} C(k = \mathrm{i}\varkappa) \neq 0$ $(\varkappa > 0)$. D'une part, indépendamment de G, φ est une fonction entière en k^2, donc la limite $\varphi(0, G, r)$ existe et est solution de $\varphi'' = G V$ telle que $\varphi \underset{r\to 0}{\simeq} r$. D'autre part les majorations (VI.15) montrent que la limite $f(-\mathrm{i}\varkappa, G, r) \underset{\varkappa\to 0}{=} f(0, G, r) = 1 + g(0, G, r)$ avec $|g(0, G, r)| \underset{r\to\infty}{\simeq} \text{Cte} \exp(-\mu r)$.

La fonction $f(0, G, r)$ est d'ailleurs une solution non identiquement nulle, bien définie ($f \underset{r\to\infty}{\simeq} 1$) de $\varphi'' = G\,V$.

Si, pour une certaine valeur de G, on a $f(0, G, 0) = 0$, alors f et φ sont multiples l'un de l'autre ([13]). On peut d'ailleurs vérifier directement, à partir de (VI.13) [où l'on fait $k = 0$], d'une part $\mathrm{Im}\ G = 0$ et, d'autre part, que $\mathrm{Re}\ G$ est identique à (VI.22).

d) *Trajectoires des états liés, antiliés et pôles k réels.* — 1° $k = \mathbf{i}\,\varkappa$. Nous avons vu que $G(\varkappa)$ est réel négatif. Pour obtenir la dérivée remarquons que le deuxième membre de

$$\varphi^2\,\frac{\partial}{\partial k}\,\frac{\varphi'' + k^2\varphi}{\varphi} = \frac{\partial G}{\partial k}\,V\,\varphi^2,$$

comme pour (VI.13), peut s'intégrer en r pour $\mathrm{Im}\ k > -(\mu/2) + \varepsilon$. Prenons $k = \mathbf{i}\,\varkappa$ ($\varkappa > -(\mu/2) + \varepsilon$) ; nous savons que φ est réelle, on obtient

$$(\mathrm{VI}.23)\qquad -2\,\varkappa\,|C|^2\left[\int_0^\infty (g^2 - 2\,g\,\mathrm{e}^{-\varkappa r})\,\mathrm{d}r + \frac{1}{2\,\varkappa}\right] = \frac{\partial G}{\partial \varkappa}\int_0^\infty V\,\varphi^2\,\mathrm{d}r\,.$$

Pour $\varkappa > 0$ le premier membre peut se transformer car $\varphi(r)$ est intégrable de $r = 0$ à $r \to \infty$

$$(\mathrm{VI}.24)\qquad -2\,\varkappa\int_0^\infty \varphi^2\,\mathrm{d}r = \frac{\partial G}{\partial \varkappa}\int_0^\infty V\,\varphi^2 < 0\,.$$

Pour $\varkappa > 0$, $G(\varkappa)$ est donc toujours décroissant, tendant vers $-\infty$ quand $\varkappa \to \infty$. Pour $\varkappa < 0$ on ne peut affirmer que $\partial G/\partial\varkappa$ ne change pas de signe.

Passant à la limite $\varkappa \to 0$ ($\varkappa > 0$ ou $\varkappa < 0$) dans (VI.23),

$$(\partial G/\partial\varkappa)_{\varkappa=0} = -1\Big/\int V\,[1 + g(r, 0)]^2\,\mathrm{d}r < 0\,.$$

Donc, et ceci est caractéristique pour l'onde S, au départ (voisinage $\varkappa = 0$) les trajectoires pour les états liés et antiliés partent en directions opposées (fig. 6).

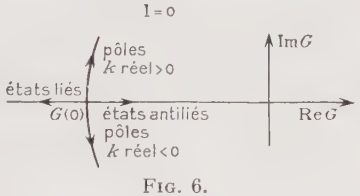

Fig. 6.

2° *k réel positif.* $G(k)$ est complexe et $\mathrm{Im}\ G > 0$. Développons (VI.21) au *voisinage de* $k = 0$ en tenant compte de $G(0)$ donné par (VI.22). $\mathrm{Re}\,G$ est une fonction paire de k et $\mathrm{Im}\,G$ une fonction impaire

$$(\mathrm{VI}.25)\qquad \mathrm{Re}\ G = G(0) + k^2\,,\qquad \mathrm{Im}\ G = \frac{k}{\displaystyle\int_0^\infty V\,[1 + g(r, 0)]^2\,\mathrm{d}r} + k^3\,;$$

la trajectoire part perpendiculairement à l'axe réel $\mathrm{Re}\ G$.

3° *Remarque.* Nous donnons, dans la figure 7, à titre d'exemple, la courbe $\mathcal{G}(\varkappa) = G_0(\varkappa)\ M/\mu^2$ ($\mathcal{G}$ sans dimension) calculée par deux itérations de la transformée de Laplace ρ définie en (VI.14). Ce calcul approché a été fait pour

([13]) On n'a pas un état lié car φ ou f n'est pas normalisable (Newton [52]).

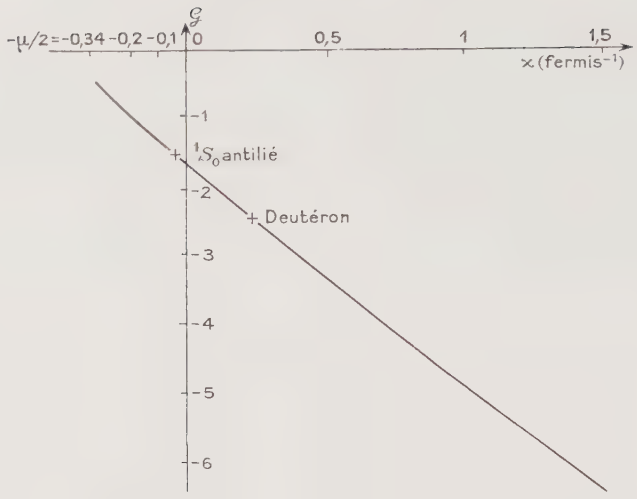

FIG. 7. — $\mathcal{G}(\varkappa) = G_0(\varkappa)\ M/\mu^2$ (sans dimension) pour $V(r) = \exp(-\mu r)/\mu r$, $\mu = 0{,}684\ 6$ fermi^{-1}.

un potentiel de Yukawa correspondant au π^0. Pour l'état antilié $^1S_0$ neutron-proton, la valeur numérique de $\varkappa$ choisie est celle que nous avons déterminée au chapitre V dans l'approximation à un pôle.

B) PLAN k ENTIER PRIVÉ DE LA COUPURE $-\mathbf{i}\,\mu/2$, $-\mathbf{i}\,\infty$. — Si $\operatorname{Im} k < -\mu/2$, même en dehors de la coupure, $V\,|\varphi|^2$ diverge quand $r \to \infty$. On va utiliser ψ définie en (VI.14). En fait, on a pour ψ et ses dérivées des majorations du type (VI.15) où $\exp(-\operatorname{Im} k\, r)$ est remplacé par 1. De l'équation différentielle de Schrödinger de f on déduit aisément celle de ψ. Multipliant l'équation obtenue par $(1+\psi)^*$ on peut alors intégrer en r de 0 à ∞ pour tout k en dehors de la coupure et comme $\psi \underset{r\to 0}{\simeq} -1 + r\,C^{-1}$ on obtient finalement

$$\text{(VI.26)}\quad \operatorname{Re}k + 2\operatorname{Im}k \operatorname{Im}\left(\int_0^\infty \psi\,\psi'^*\,\mathrm{d}r\right) = \operatorname{Im}G \int_0^\infty V\,|1+\psi|^2\,\mathrm{d}r\,,$$

$$\text{(VI.27)}\quad -\int_0^\infty |\psi|^2\,\mathrm{d}r - \operatorname{Im}k + 2\operatorname{Re}k \operatorname{Im}\left(\int_0^\infty \psi\,\psi'^*\,\mathrm{d}r\right) = \operatorname{Re}G \int_0^\infty V\,|1+\psi|^2\,\mathrm{d}r\,.$$

C'est seulement pour k réel que ces équations s'identifient aux précédentes (VI.16 et 17). On peut cependant trouver des indications semblables pour les trajectoires, par exemple pour les états liés et antiliés bien que les équations diffèrent.

2. Domaine d'analyticité en k de la fonction $G(k)$ telle que $f[-k,\ G(k)] \equiv 0$. — Nous rappelons que la fonction de Jost $f(-k,\ G)$ est analytique par rapport à k et G au voisinage de 0, $G(0)$; nous savons d'autre part que $(\partial f/\partial k)_{0,G(0)} \neq 0$; nous pouvons donc trouver un voisinage de $G(0)$ tel que $f(-k,\ G) = 0$ définisse

une fonction implicite *unique* k, analytique par rapport à $G - G(0)$ et telle que $k[G(0)] = 0$. Inversement, existe-il un voisinage de $k = 0$ tel que $f(-k, G) = 0$ définisse une fonction implicite unique $G(k)$ analytique en k et prenant la valeur $G(0)$ pour $k = 0$? Remarquons que pour les deux trajectoires considérées (axes k réel et imaginaire) on a, d'après (VI.24) et (VI.25),

$$\left(\frac{\partial G}{\partial k}\,(k \text{ réels})\right)_{k=0} = \left(-\mathbf{i}\,\frac{\partial G}{\partial \varkappa}\,(\text{états liés et antiliés})\right)_{\varkappa=0}$$
$$= \mathbf{i}\Big/\int V\,[1 + g(r, 0)]^2\,dr\,,$$

ce qui semble indiquer que ces deux trajectoires correspondent à la même fonction analytique $G(k)$. Plus généralement, pour tout pôle complexe (k_0, G_0) se pose le problème de l'existence d'une fonction implicite unique G analytique au voisinage de k_0. Nous étudions donc $(\partial f/\partial G)_{(-k,\,G)}$. Pour cela nous considérons la fonction de Jost définie par les wronskiens ; alors

$$\frac{\partial f}{\partial G} = C\,W\left(\frac{\partial f}{\partial G}, f\right) + C^{-1}\,W\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial G}\right),$$

où nous avons tenu compte de (VI.12).

Par la combinaison habituelle de l'équation de Schrödinger pour φ et $\partial\varphi/\partial G$ d'une part, f et $\partial f/\partial G$ d'autre part où nous tenons compte des bornes (VI.15) (cf. § VI.5.5a), on obtient

$$\text{(VI.28)} \qquad \frac{\partial f}{\partial G}\,(-k, G) = C(k)\int_0^\infty V f^2\,dr = C^{-1}\int_0^\infty V\,\varphi^2\,dr$$
$$= \frac{f(k, G)}{2\,\mathbf{i}\,k}\int_0^\infty V f^2(-k, G, r)\,dr\,.$$

Une condition suffisante pour $\partial f/\partial G \neq 0$ dans le demi-plan [14] $\operatorname{Im} k > -(\mu/2) + \varepsilon$ est donc que φ ou f soit réelle (G réel) et C ou C^{-1} ni nul ni infini.

Par conséquent, au voisinage des états liés, antiliés, résonances physiques, $k = 0$, il existe une solution $G(k)$ analytique unique. En particulier, au voisinage de $k = 0$,

$$\text{(VI.29)} \qquad G(k) = G(0) + \frac{\mathbf{i}\,k}{\displaystyle\int_0^\infty V f^2[0, G(0), r]\,dr} + k^2\,.$$

3. Convergence du développement de Born. — Davies [48] a montré que l'amplitude totale $A(\vec{k}) = A(k, \cos\theta) = \sum_1 (2\,l + 1)\,\dfrac{\exp(\mathbf{i}\,\delta_l)\sin\delta_l P_l}{k}$ pour un potentiel $V(r) > 0$, borné et de portée finie, est convergente si $-|V(r)|$ ne peut donner d'état lié.

Remarquons que pour k réel le rayon de convergence de δ_0 est le même que celui de $(\delta_0 - 1)/2\,\mathbf{i}\,k = \exp(\mathbf{i}\,\delta_0)\sin\delta_0/k$,

[14] Remarquons que (VI.28) reste vrai pour une classe plus générale de potentiels, ceux qui décroissent au moins aussi vite que $\exp(-\mu\,r)$ Cte quand $r \to \infty$ (cf. § VI.5.5).

$$\frac{\exp(\mathbf{i}\,\delta_0)\sin\delta_0}{k} = -\frac{G}{k^2}\int_0^\infty \sin k\,r\; V(r)\,u(r)\,\mathrm{d}r\,,$$

où

$$u(r) = \sin k\,r - \frac{G}{k}\int_0^\infty \exp(\mathbf{i}\,k\,r)\sin\underset{r<}{k\,r}\; V(r)\,u(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

Si on itère l'équation intégrale et que l'on reporte dans l'amplitude on obtient $\dfrac{\exp(\mathbf{i}\,\delta_0)\sin\delta_0}{k} = \sum_1^\infty G^n\,u_n(k)$ où, par exemple, $u_1(k)$ est la première approximation de Born. Mais on peut vérifier que si les potentiels sont positifs et vérifient

$$\int_{\mathrm{Cte}}^\infty r^2\; V(r)\,\mathrm{d}r < \infty\,, \tag{VI.30}$$

alors $|u_n(k)| < u_n(0)$. Le rayon de convergence pour l'onde S est donné par la singularité la plus proche de

$$\lim_{k\to 0}\frac{\exp(\mathbf{i}\,\delta_0)\sin\delta_0}{k} = -\frac{\mathbf{i}\,(\partial f_0/\partial k)_{k=0}}{f_0(0,G)}\,,$$

c'est donc $|G^{(0)}_{0,0}| = \inf_{\substack{\forall m \\ l=0,m}} |G(k=0)|$.

Or Davies, par itération de l'équation intégrale de la fonction d'onde totale a écrit $A(\vec{k})$ sous la forme $\sum G^n\,v_n(\vec{k})$. Il a montré que $|\,v_n(\vec{k})\,| < v(0)$ et ceci reste vrai pour des potentiels satisfaisant (VI.30). Or il se trouve que $u_n(0) \equiv v_n(0)$, donc,

1° $S_0(k)$, $\exp(\mathbf{i}\,\delta_0)\sin\delta_0/k$ et l'amplitude totale ont le même rayon de convergence $|G^{(0)}_{0,0}|$. Cela ne doit pas nous surprendre car Davies [48] a montré que l'amplitude totale avait pour rayon de convergence celui de $\lim_{k\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,\delta_0}{k}$ et Kohn [47] a établi que $(\mathrm{tg}\,\delta_0)/k$ et $S_0(k)$ avaient la même singularité la plus proche pour $k = 0$, c'est-à-dire $G^{(0)}_{0,0}$.

2° $\forall m,l$ on a $|G^{(0)}_{l,m}| > |G^{(0)}_{0,0}|$.

3° En particulier, la proposition établie par Davies reste valable pour des potentiels du type de Yukawa de signe constant.

5. **Cas des ondes** $l \neq 0$. — Les solutions entrantes et sortantes ayant un pôle cinématique d'ordre l en $k = 0$ nous définissons $F_l(k, G, r) = k^l\,f_l(k, G, r)$, la fonction de Jost correspondante $F_l(k, G) = k^l\,f_l(k, G)$ étant déterminée par le wronskien (VI.3), F_l remplaçant f_l. Pour un pôle (k, G), zéro de $F_l(-k, G)$, la solution physique φ_l donnée par (VI.2) devient donc

$$\begin{cases} \varphi_l(k, G, r) = C_l(k)\,F_l(-k, G, r) \underset{r\to\infty}{\simeq} C_l(k)\,(-k)^l\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}kr}\,, \\ C_l(k) = (-1)^l\,\dfrac{2\,l+1}{2\,\mathbf{i}\,k^{2l+1}}\,F_l(k, G)\,. \end{cases} \tag{VI.31}$$

Nous ne ferons qu'une étude partielle, la plupart des résultats se transposant sans difficulté de $l = 0$ à $l \neq 0$. Pour des potentiels du type de Yukawa, l'extension pourrait se faire entièrement en utilisant la transformation par les fonctions

de Hankel définie dans les chapitres I et II. En fait nous ne l'utiliserons pas toujours.

1. Pôles dans $\mathrm{Im}k > 0$. — Par intégration de (VI.13) on a

$$\text{(VI.32)}\quad \begin{cases} [(\mathrm{Re}k)^2 - (\mathrm{Im}k)^2] \int_0^\infty |\varphi_l|^2 \, dr - \int_0^\infty \left(|\varphi_l'|^2 + \dfrac{l(l+1)}{r^2} |\varphi_l|^2 \right) dr = \\ \qquad = \mathrm{Re}G_l \int_0^\infty V |\varphi_l|^2 \, dr , \\ 2 \, \mathrm{Im}k \, \mathrm{Re}k \int_0^\infty |\varphi_l|^2 \, dr = \mathrm{Im}G_l \int_0^\infty V |\varphi_l|^2 \, dr . \end{cases}$$

Ici encore les seuls pôles G réels sont les états liés $k = \mathbf{i}\,\varkappa$ et $G_l(\varkappa) < 0$; pour $\varkappa \neq 0$ on peut vérifier que la relation (VI.24) reste la même donnant $\partial G_l/\partial \varkappa < 0$ ($\varkappa \neq 0$)

$$\text{(VI.24')}\qquad -2\,\varkappa \int_0^\infty \varphi_l^2 \, dr = \frac{\partial G_l}{\partial \varkappa} \int_0^\infty V \varphi_l^2 \, dr .$$

2. Les pôles k *réels* sont complexes en G, la combinaison habituelle de l'équation de Schrödinger pour φ_l et φ_l^* donnant

$$\text{(VI.33)}\qquad \mathrm{Im}G_l \int_0^\infty V \, |F_l(-k, G, r)|^2 \, dr = k^{2l+1} ;$$

$\mathrm{Im}\,G_l$ a toujours le signe de k réel.

3. Etats antiliés. — Dans le demi-plan $\mathrm{Im}\,k > -(\mu/2) + \varepsilon$ pour des potentiels (VI.11) on peut utiliser la transformation [(II.5) et (II.7) pour $r_c = 0$]

$$\text{(VI.34)}\quad F_l(-k, G, r) = \mathbf{i}^{l+1} \, (-k)^l \left[\mathbf{h}_l(k\,r) + \int_0^\infty \mathbf{h}_l[(k + \mathbf{i}\,\alpha)\, r] \, \rho_l(\alpha, k, G) \, d\alpha \right]$$
$$= H_l(k, r) + g_l(k, G, r) .$$

Nous considérons toujours k et G non infinis ; on peut obtenir pour g_l et ses dérivées des bornes du type (VI.15), la propriété $\rho_l(\alpha) \equiv 0$ pour $\alpha < \mu$ restant vraie pour $l \neq 0$ comme nous l'avons vu dans les chapitres I et II. On va se limiter, à titre d'illustration, à montrer que $\mathrm{Im}\,G_l = 0$ pour les états liés et antiliés. Pour cela, par la combinaison habituelle de l'équation de Schrödinger pour φ_l et φ_l^*, on a

$$\text{(VI.35)}\quad 2\,\mathbf{i}\,\mathrm{Im}G_l \int_0^r V \, |\varphi_l|^2 \, dr = |C_l(\mathbf{i}\,\varkappa, G)|^2 \left[F_l'(r)\, F_l^*(r) - F_l'^*(r)\, F_l(r) \right]_r ;$$

la limite $r \to \infty$ du deuxième membre de (VI.35) est nulle, on a donc bien encore $\mathrm{Im}\,G_l = 0$ pour $\varkappa < 0$.

4. Pôle $k = 0$. — On peut montrer, comme pour $l = 0$, que $\lim_{k\to 0} C_l(k) \to \mathrm{Cte}$, en passant à la limite pour un état lié. Considérons $\varphi_l = C_l F_l$ donné par (VI.31) pour $k = \mathbf{i}\,\varkappa$ ($\varkappa$ positif $\to 0$), d'une part $\varphi_l(0, G, r)$ existe d'autre part $H_l(\mathbf{i}\,\varkappa, r) \to (-1)^l \, (2l)!/l! \, r^l$ et, d'après les bornes du type (VI.15), $g_l(0, r, G) \underset{r\to\infty}{\simeq} \mathrm{Cte} \exp(-\mu\, r)$. Le même raisonnement que pour $l = 0$, en utilisant le fait que l'équation de Schrödinger pour $k = 0$ admet une solution $u \underset{r\to\infty}{\simeq} 1/r^l$

montre alors que $\lim_{\varkappa\to 0} C_l(i\varkappa) \to$ Cte. Alors pour les états liés $l \neq 0$, $\varphi_l^2 \underset{r\to\infty}{\simeq} r^{-2l}$ est intégrable et on peut passer à la limite dans (VI.32 et 24') d'après les bornes du type (VI.15)

$$\text{(VI.36)} \quad \begin{cases} \text{pour } l \neq 0\,, \quad (\partial G_l/\partial\varkappa)_{\varkappa=0} = 0\,, \\ G_l(0) = -\int_0^\infty \left[F_l'^2(0,r) + \frac{l(l+1)}{r^2} F_l^2(0,r)\right] dr \Big/ \int_0^\infty V\, F_l^2(0,r)\, dr < 0\,. \end{cases}$$

5. *Etude de* $\dfrac{\partial F_l}{\partial G}(-k, G)$ *pour* $l = 0$ *et* $l \neq 0$. — On considère encore les fonctions de Jost définies par les wronskiens d'où, en tenant compte de (VI.31),

$$\text{(VI.37)} \quad \frac{\partial F_l}{\partial G} = C_l(k)\, W\left[\frac{\partial F_l}{\partial G}(-k, G, r),\, F_l\right] + C_l^{-1}\, W\left(\varphi_l,\, \frac{\partial \varphi_l}{\partial G}\right).$$

Dans le membre de droite, le deuxième terme, par combinaison des équations de φ_l et $\partial\varphi_l/\partial G$ sans restriction sur k, s'écrit $C_l^{-1}\int_0^r V\,\varphi_l^2\, dr$, le premier terme est plus délicat.

a) Soit $\mathrm{Im}k > -(\mu/2) + \varepsilon$ et supposons les potentiels du type de Yukawa (VI.11). La combinaison des équations pour F_l et $\partial F_l/\partial G$ nous donne

$$\left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial r\,\partial G} - \frac{\partial F_l}{\partial G}\frac{\partial F_l}{\partial r}\right)_r^R = \int_r^R V\, F_l^2\, dr\,;$$

utilisant les bornes du type (VI.15) dans les transformations (VI.14 et 34) on trouve que, dans le membre de gauche, la contribution venant de R s'annule quand $R \to \infty$. Le premier terme de (VI.37) se réduit à $C_l\int_r^\infty V\, F_l^2\, dr$, d'où

$$\text{(VI.38)} \quad \frac{\partial F_l}{\partial G} = C_l^{-1}(k)\int_0^\infty V\,\varphi_l^2\, dr = C_l\int_0^\infty V\, F_l^2(-k, G, r)\, dr\,.$$

b) Si on impose des conditions moins fortes sur les potentiels [par exemple $V(r) \underset{r\to\infty}{\simeq} \mathrm{Cte}\exp(-\mu r)$], alors on se restreint dans une première étape à $\mathrm{Im}k > 0$; le premier terme donnant $C_l\int_r^\infty V\, F_l^2\, dr$, on obtient pour $\partial F_l/\partial G$ la même expression (VI.38) que précédemment pour $\mathrm{Im}k > 0$ seulement.

Mais F_l et $\partial F_l/\partial G$ sont analytiques pour G complexe et $\mathrm{Im}k > -(\mu/2) + \varepsilon$ et les intégrales $\int_0^r V\, F_l^2(-k, G, r)\, dr$ se prolongent analytiquement de $\mathrm{Im}k > 0$ à $\mathrm{Im}k > -(\mu/2) + \varepsilon$. On voit que l'expression (VI.38) de $\partial F_l/\partial G$, valable pour G complexe et $\mathrm{Im}k > -(\mu/2) + \varepsilon$, l'est pour une classe plus large que la famille (VI.11).

Finalement pour $l = 0$ ou $l \neq 0$ une condition suffisante pour $\partial F_l/\partial G \neq 0$ est φ_l réelle, condition réalisée pour les états liés, antiliés, $k = 0$.

En particulier, il existe une fonction implicite unique $G_l(k)$, analytique par rapport à k au voisinage de $k = 0$. Pour $l \neq 0$, nous savons que $(\partial G_l/\partial k)_{k=0}$ est nul puisque pour les états liés $\lim_{\varkappa\to 0} G_l'(\varkappa) = 0$; ceci entraîne

$$\left(\frac{\partial F_l}{\partial \varkappa}\right)_{\varkappa=0} = \left(\frac{\partial F_l}{\partial G_l}\right)_{G_l(0),0} \left(\frac{\partial G_l}{\partial \varkappa}\right)_{\varkappa=0} \begin{cases} \neq 0 \text{ pour } l = 0 \\ = 0 \text{ pour } l \neq 0 \end{cases}.$$

On retrouve le résultat donné par Newton [52] : $(\partial F_l/\partial k)_{k=0} = 0$ si $l \neq 0$.

Pour obtenir $[\partial^2 G_l(k)/\partial k^2]_{k=0}$ on va encore passer à la limite pour les états liés.

$$\left(\frac{\partial^2 G_l}{\partial \varkappa^2}\right)_{\varkappa=0} = \lim_{\varkappa>0\to 0} \frac{G'(\varkappa) - G'(0)}{\varkappa} < 0\,, \quad \text{donc} \quad \left(\frac{\partial^2 G_l}{\partial k^2}\right)_{k=0} > 0$$

et les premiers termes de $G_l(k)$ sont

$$G_l(k) = G_l(0) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{\partial^2 G_l}{\partial k^2}\right)_{k=0} + \ldots\,, \quad l \neq 0,\ k \text{ complexe.}$$

En général à toute valeur $G_l(k)$ au voisinage de $G_l(0)$, il correspondra deux valeurs de k dans le voisinage de $k = 0$, ces deux valeurs étant dans des directions opposées $= \mathrm{i}\varkappa$ pour les états liés et antiliés. Ceci résulte de ce que $(\partial F_l/\partial k)_{k=0}$ étant nul pour $l \neq 0$, k considéré comme fonction de G_l admet deux déterminations d'où (fig. 8 et 9) :

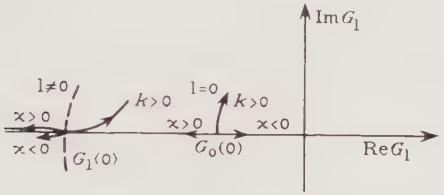

Fig. 8.

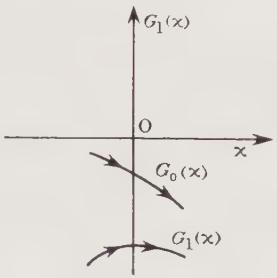

Fig. 9.

a) états liés et antiliés,

$$G_l(\varkappa) = G_l(0) + \frac{\varkappa^2}{2}\left(\frac{\partial^2 G_l}{\partial \varkappa^2}\right)_{\varkappa=0} + \ldots$$

A $G_l(\varkappa)$ proche de $G_l(0)$ correspondent un état lié et un état antilié, $G_l(\varkappa)$ reste toujours négatif et tend vers $-\infty$ pour les états liés ;

b) pôles réels,

$$\mathrm{Re}\,G_l = G_l(0) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{\partial^2 G_l}{\partial k^2}\right)_{k=0} + k^4\,, \quad \mathrm{Im}\,G_l = \frac{k^{2l+1}}{\displaystyle\int_0^\infty V\,|F_l(0,r)|^2\,\mathrm{d}r} + k^{2l+3}\,.$$

La trajectoire part donc à droite de $G_l(0)$, tangentiellement, ayant un contact d'ordre $l + \frac{1}{2}$ avec l'axe réel.

Il suffit de regarder la figure pour voir que, contrairement à ce qui se passe pour $l = 0$, dans le cas $l \neq 0$ la condition $|G_l| < |G_l(0)|$ ne peut entraîner la convergence de la série de Born car la trajectoire k réel positif pénètre *nécessairement* dans le cercle de rayon $|G_l(0)|$ centré en O.

Je remercie Mr le professeur M. Lévy de m'avoir, par son enseignement, intéressé à la physique théorique et d'avoir accepté de présider ce jury.

Je remercie Mrs les professeurs M. Jean et J. Teillac de m'avoir accueilli au Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences à Orsay.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Mr R. Nataf, professeur à la Faculté des Sciences de Paris. C'est sous sa direction que cette étude a été entreprise ; après l'avoir proposée, il a constamment guidé, contrôlé et contribué au développement du travail.

Je remercie aussi vivement le Dr André Martin, du C. E. R. N., pour toute l'aide qu'il m'a apportée. Une partie de ce travail (chap. IV) a d'ailleurs été faite en collaboration avec lui. Je lui suis reconnaissant de m'avoir accueilli pendant deux séjours au C. E. R. N. au cours desquels il m'a donné de nombreux conseils et suggestions utiles.

Références

[1] R. A. Bryan, *Nuovo Cim.* [10], t. **16**, 1960, p. 895.
[2] T. Hamada, *Prog. theor. Physics*, t. **24**, 1960, p. 220 et t. **25**, 1961, p. 247.
[3] P. T. Matthews, Conférence Intern. d'Aix-en-Provence sur les particules élémentaires, éd. C. E. A., Paris, t. **2**, p. 87.
[4] T. Regge, *Nuovo Cim.* [10], t. **14**, 1959, p. 951.
[5] J. Bowcock & A. Martin, *Nuovo Cim.* [10], t. **14**, 1959, p. 516.
[6] R. Blankenbecler, M. L. Golbberger, N. N. Khuri & S. B. Treiman, *Ann. Physics*, t. **10**, 1960, p. 62.
[7] A. Klein, *Jl math. Physics*, t. **1**, 1960, p. 41.
[8] A. Martin, *Nuovo Cim.* [10], t. **14**, 1959, p. 403.
[9] A. Martin, *Nuovo Cim.* [10], t. **15**, 1960, p. 99.
[10] A. Martin, *Nuovo Cim.* [10], t. **19**, 1961, p. 1257 ; Summer School of theoretical Physics, Yugoslavia, 1961.
[11] T. Regge, *Nuovo Cim.* [10], t. **18**, 1960, p. 947.
[12] A. Bottino, A. M. Longoni & T. Regge, *Nuovo Cim.* [10], t. **23**, 1962, p. 954.
[13] L. Schwartz, Transformation de Laplace, Centre Docum. Univ., Paris, p. 13-17.
[14] H. Cornille, *C. r. Ac. Sc.*, t. **251**, 1960, p. 2135 et 2308.
[15] H. Cornille, *Nuovo Cim.* [10], t. **21**, 1961, p. 773.
[16] V. de Alfaro & C. Rossetti, *Nuovo Cim.* [10], t. **18**, 1960, p. 780.
[17] L. Bertocchi, C. Ceolin & N. Tonin, *Nuovo Cim.* [10], t. **18**, 1960, p. 770.
[18] S. Okubo & R. E. Marshak, *Ann. Physics*, t. **4**, 1958, p. 166.
[19] J. M. Blatt & L. C. Biedenharn, *Phys. Review*, t. **86**, 1952, p. 399.
[20] R. Vinh-Mau & A. Martin, *Nuovo Cim.* [10], t. **20**, 1961, p. 310.
[21] H. Cornille, *Nuovo Cim.* [10], t. **23**, 1962, p. 526.
[22] G. Breit, E. U. Condon & R. D. Present, *Phys. Review*, t. **50**, 1936, p. 825.
[23] J. D. Jackson & J. M. Blatt, *Rev. mod. Physics*, t. **22**, 1950, p. 77.
[24] D. Y. Wong & H. P. Noyes, *Phys. Review*, t. **126**, 1962, p. 1866.
[25] H. P. Noyes, Annual Intern. Conference on high energy physics, Univ. Rochester, 1960, p. 117.
[26] H. P. Noyes, *Phys. Review*, t. **119**, 1960, p. 1736 ; Nuclear force and the few nucleon problems, éd. Pergamon Press, Oxford, 1960, t. **1**, p. 39.
[27] H. P. Noyes & D. Y. Wong, *Phys. Review Let.*, t. **3**, 1959, p. 191.
[28] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger & F. G. Tricomi, Higher transcendental functions, éd. McGraw-Hill C°, New York, t. **1**, p. 18 (formule 27), p. 15 (formule 3).
[29] M. H. Hull & G. Breit, Hanbuch der Physik, éd. Springer, Berlin, t. **41-1**, 1959, p. 414.
[30] H. Cornille & A. Martin, *Nuovo Cim.* [10], t. **26**, 1962, p. 298.
[31] L. A. P. Balázs, *Phys. Review*, t. **125**, 1962, p. 2179.
[32] B. Bosco & J. Sucher, *Nuovo Cim.* [10], t. **19**, 1961, p. 1182.
[33] G. F. Chew, Relations de dispersion et particules élémentaires, Cours Ecole des Houches, éd. Hermann, Paris, 1960, p. 455.
[34] S. T. Ma, *Rev. mod. Physics*, t. **25**, 1953, p. 853.
[35] D. Y. Wong, *Phys. Review Let.*, t. **2**, 1959, p. 406.
[36] M. M. MacGregor, M. J. Moravcsik & M. P. Stapp, Annual review of nuclear science, 1960, p. 291.

[37] J. L. Russel, G. C. Phillips & C. W. Reich, *Phys. Review*, t. **104**, 1956, p. 135.
[38] J. Gammel & R. M. Thaler, Progress in elementary particle and cosmic ray physics, éd. North-Holland Publ. C°, Amsterdam, 1960, t. **5**.
[39] L. Heller, *Phys. Review*, t. **120**, 1960, p. 627.
[40] J. K. Perring & R. J. N. Phillips, *Nuclear Physics*, t. **23**, 1961, p. 153.
[41] T. Hamada & I. D. Johnston, *Prog. theor. Physics*, t. **26**, 1961, p. 153.
[42] Y. Hara, *Prog. theor. Physics*, t. **26**, 1961, p. 627.
[43] V. de Alfaro & T. Regge, *Nuovo Cim.* [10], t. **20**, 1961, p. 956.
[44] H. P. Stapp, M. Moravcsik & H. P. Noyes, Lawrence Radiation Labo., 1962 (non publié).
[45] M. M. MacGregor & M. J. Moravcsik, *Phys. Review Let.*, t. **4**, 1960, p. 524.
[46] R. Jost & A. Pais, *Phys. Review*, t. **82**, 1951, p. 840.
[47] W. Kohn, *Rev. mod. Physics*, t. **26**, 1954, p. 292.
[48] H. Davies, *Nuclear Physics*, t. **14**, 1959, p. 465.
[49] K. Meetz, *Jl math. Physics*, t. **3**, 1962, p. 690.
[50] R. Nataf & H. Cornille, à paraître.
[51] K. Chadan, *Nuovo Cim.* [10], t. **24**, 1962, p. 379.
[52] R. G. Newton, *Jl math. Physics*, t. **1**, 1960, p. 319.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

« Rétrécissement du pic de diffraction à haute énergie et interprétation dans la théorie des pôles de Regge ».

Vu et approuvé :
Paris, le 9 avril 1963
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE

CHAPELLE	T	Physique (Orsay).
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).
DENY	T	Mathématiques gén. (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
LUCAS G.	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique fondamentale des hautes énergies (Orsay).
BRICARD	T	Météorologie et Physique de l'Atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD		Psychophysiologie.
FRIEDEL		Physique du Solide (Orsay).
M. JULIA		Etudes des molécules naturelles complexes.
LENDER	T	Biologie animale (S. P. C. N.) (Orsay).
MAGAT		Physico-chimie des Radio-éléments.
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
BENOIT	T	Physiologie animale (Orsay).
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
HAISSINSKY	T	Radiochimie.
LEMÉE	T	Physiol. vég. (B. M. P. V.) (Orsay).
GUÉRIN	T	Chimie (M. P. C.) (Orsay).
CHATELET M.	T	Chimie (P. C. B.).
JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay).
MATTLER	T	Physique (S. P. C. N.).
MICHEL L.		Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
BERGERARD		Zoologie (Orsay).
BERTEIN		Electronique (Orsay).
BOUISSIÈRES		Chimie des Radioéléments (Orsay).
Mme COUTURE		Thermodynamique et Méc. physique.
ELLENBERGER		Géologie appli. sur le terr.
FRANC		Biologie animale (P.C.B.).
SCHNELL		Botanique tropicale (Orsay).
STOLKOWSKI		Physiologie générale.
ACHER		Chimie biologique (Orsay).
BAUDOIN		Biologie animale (P.C.B.).
BEAUMONT		Biologie animale (S.P.C.N.).
BLAMONT		Géophysique Ionosphère.
BOURREAU		Botanique.
CURIE D.		Physique (M.G.P.).
DURAND-DELGA		Géologie.
FREON	T	Chimie organique (Orsay).
HELLER		Physiologie végétale.
TORTRAT		Calcul des Probabilités.
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.).
MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.).
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire.
Mlle FOURCROY		Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mme CHOQUET-BRUHAT.	T	Méc. analytique et Méc. céleste.
Mlle VEIL		Physiologie générale.
WOLFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécan. phys. et expérim.
LACOMBE	T	Métallurg. des métaux nucl.
BROCHARD	T	Physique (M.P.C.) (Orsay).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Mathématiques (M. P. C.) (Orsay).
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
CAIRE		Géographie phys. et Géol. dynamique.
COMOLET		Mécanique des Fluides.
CORABOEUF		Physiologie animale.
DELLOUE		Physique de l'exosphère.
GORENFLOT		Biologie végétale (Orsay).
HOUILLON		Biologie animale (P.C.B.).
JULLIEN J.		Chimie (M.P.C.) (Orsay).
MALGRANGE		T. M. P. (Orsay).
OLIVIER		Antropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE		Physique ENS. (Orsay).
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
SAMUEL	T	Mathéma. (E.N.S.). fémi.
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
THIRY	T	Mécanique céleste.

Secrétaire Général..... R. POULLAIN

Imprimé en France. — IMPRIMERIE JOUVE, 15, rue Racine, PARIS (6e).